Τμήμα Φυσικής
Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Σπουδών
Πειραματικές Μέθοδοι Φυσικής Υψηλών Ενεργειών (ΙΙ)

Χώρος φάσεων σε δέσμες επιταχυντών και emittance

Ευστάθιος Κ. Στεφανίδης

Τομέας Πυρηνικής Φυσικής και
Φυσικής Στοιχειωδών Σωματιδίων.

Στην παρούσα εργασία αρχικά, θα γίνει ανασκόπιση των γνωστών από την κλασσική χαμιλτόνια μηχανική των εννοιών του κανονικού χώρου φάσεων και του θεωρήματος του Liouville και θα εισαχθεί η έννοια της emittance μιας δέσμης επιταχυνόμενων σωματιδίων. Θα ασχοληθούμε με την έννοια των πορτραίτων φάσης, ως μέσο για τη γεωμετρική περιγραφή της κίνησης και θα καταλήξουμε στη θεμελίωση της emittance, χρησιμοποιώντας τη μεθοδολογίας της στατιστικής.

1. Ανασκόπηση βασικών εννοιών από την κλασσική μηχανική του Hamilton.

1.1 Ο κανονικός χώρος φάσεων.

Ένα μηχανικό σύστημα με r βαθμούς ελευθερίας χαρακτηρίζεται από τις r γενικευμένες συντεγμένες q_i και τις αντίστοιχες r γενικευμένες ορμές p_i (i=1,2……,r). Η χρονική του εξέλιξη μπορεί να δωθεί μέσω της χαμιλτονιανής τους, η οποία θα είναι συνάρτηση των ποσοτήτων αυτών και του χρόνου και η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$H = p_i \dot{q}_i - L \quad (1.1.1)$$

όπου L είναι η Λαγκρασιανή του συστήματος

Εάν θεωρήσουμε ότι δεν έχουμε δυνάμεις τριβής, και γενικά μη συντηριτικές δυνάμεις, οι εξισώσεις Hamilton θα συνδέουν τις δύο παραπάνω ποσότητες ως εξής:

$$\begin{cases} \dot{q}_i = +\dfrac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i = -\dfrac{\partial H(q_i, p_i, t)}{\partial q_i} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

Μιά χαρακτηριστική δυναμική που περιέχει μέσα της η χαμιλτονιανή H, είναι το γεγονός ότι, όταν αυτή δεν εξαρτάται αναλυτικά από τον χρόνο, τότε εκφράζει την ολική ενέργεια του συστήματος, η οποία παραμένει **αναλοίωτη**.

Ο κανονικός χώρος των φάσεων είναι ένας χώρος 2r-διαστάσεων (r:βαθμοί ελευθερίας του συστήματος) με τις συζυγείς συντεταγμένες q_i και p_i. Η κατάσταση ενός συστήματος τη χρονική στιγμή t αναπαρίσταται στο χώρο των φάσεων με ένα σημείο M(t) με συντεταγμένες ($q_i(t), p_i(t)$). Όσο αυξάνει ο χρόνος, το σημείο M διαγράφει μια (χαρακτηριστική) τροχιά, την **τροχιά φάσης**.

Παρακάτω δίδονται επιγραμματικά, μερικά κύρια χαρακτηριστικά ενός χώρου φάσης και μιας τροχιάς φάσης:

- Όταν η χαμιλτονιανή είναι ανεξάρτητη του χρόνου, τότε υπάρχει **μία μόνο** τροχιά φάσης που ξεκινά από ένα σημείο M του χώρου φάσης. Εξαίρεση αποτελούν τα σημεία ασταθούς ισορροπίας, όπου μηδενίζονται οι πρώτες παράγωγοι της χαμιλτονιανής ως προς q_i, p_i.
- Οι διάφορες τροχιές φάσης δεν τέμνονται μεταξύ τους.
- Η κίνηση κατά μήκος μιας κλειστής τροχιάς είναι περιοδική.
- Στην περίπτωση που ο χώρος των φάσεων είναι 2 διαστάσεων (μονοδιάστατη κίνηση), όλες οι τροχιές που ξεκινούν από σημεία που βρίσκονται εντός μιας κλειστής τροχιάς, περιορίζονται από την τροχιά αυτή.

Για μία δέσμη N σωματιδίων, θα έχουμε 3N βαθμούς ελευθερίας, αφού, σε καρτεσιανές συντενταγμένες κάθε σωμάτιο χαρακτηρίζεται από το διάνυσμα **r**=(x,y,z). Οπότε, ο χώρος των φάσεων θα έχει 2x3N=6N διαστάσεις. Σε περίπτωση όμως ίδιων και μη αλλελεπιδρώντων

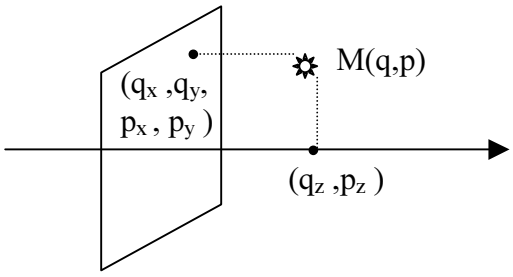
σωματιδίων, μπορούμε να θεωρήσουμε το χώρο φάσης ενός σωματιδίου, ο οποίος τώρα θα είναι 6 διαστάσεων.

Σε μια δέσμη σωματιδίων, μπορούμε να αποδώσουμε στην κατάσταση της δέσμης μια **πυκνότητα φάσης**, η οποία εν γένει θα εξαρτάται από το χρόνο, $f(\vec{q},\vec{p},t)$. Είναι λοιπόν προφανές ότι σε στοιχειώδη όγκο d^3qd^3p (στο χώρο φάσεων), θα περιέχεται στοιχειώδης αριθμός σωματιδίων:

$$dN = f(\vec{q},\vec{p},t)\cdot d^3qd^3p \quad (1.1.3)$$

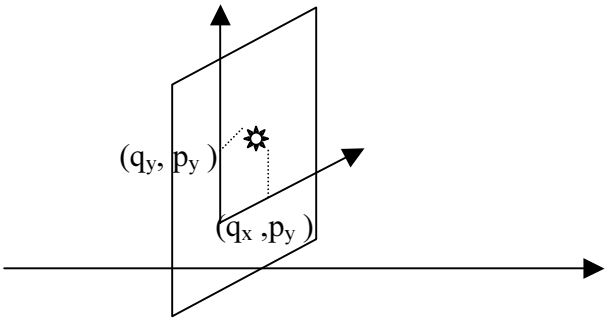
Αυτή λοιπόν η πυκνότητα φάσης ακολουθεί όλες τις γνωστές ιδιότητες πυκνοτήτων και έτσι μπορεί να εκφράζει μια γκαουσιανή ή ομοιόμορφη κατανομή σε ένα ελλειψοειδές ή ακόμα και να είναι μια παραβολική συνάρτηση.

Συνήθως, η διαμήκης κίνηση κατά τον άξονα της δέσμης μπορεί να αναλυθεί σε μια προβολή στον άξονα αυτόν και σε ένα **κάθετο** προς αυτόν επίπεδο, όπως φαίνεται παρακάτω:



Στην περίπτωση αυτή, ο 6-διαστάσεων χώρος φάσης μπορεί να χωριστεί σε ένα διαμήκες χώρο φάσεων 2πλής διάστασης και σε ένα εγκάρσιο χώρο φάσεων 4πλής διάστασης.

Επιπλέον όμως, το εγκάρσιο επίπεδο μπορεί να χωριστεί σε δύο φασικούς χώρους δύο διαστάσεων, όπως φαίνεται παρακάτω:



Θα πρέπει να αναφέρουμε ότι, όπως σε κάθε αναπαράσταση μπορούμε να έχουμε έναν κανονικό μετασχηματισμό των συντεταγμένων, έτσι και εδώ μπορούμε να μεταβούμε, μέσω ενός ***κανονικού*** μετασχηματισμού, από τις (q_i,p_i) συντεταγμένες στις (Q_i,P_i). Συνήθως μετασχηματίζουμε τις εγκάρσιες συντεταγμένες (z,p_z) στην μετατόπιση φάσης δφ και στην αύξηση της ενέργειας δΕ.

Τέλος, με την εφαρμογή της αρχής αβεβαιότητας του Heinsberg, θα πάρουμε:

$$\delta q_i \cdot \delta p_i \geq \hbar c \quad (1.1.4)$$

πράγμα που σημαίνει ότι δεν μπορούμε να προσδιορίσουμε με ακρίβεια και τις δύο συντεταγμένες ταυτόχρονα. Αυτό ποιοτικά σημαίνει ότι η κατάσταση ενός σωματιδίου της δέσμης δεν αναπαρίσταται από ένα σημείο,αλλά από έναν μικρό όγκο αβεβαιότητας. Η κβαντομηχανική θεωρία όμως δεν συνεισφέρει σημαντικά όταν περιοριζόμαστε στην μακροσκοπική μελέτη της δέσμης. Η συνεισφορά της γίνεται σημαντική όταν μεταβαίνουμε

σε ατομικό επίπεδο, όπως για παράδειγμα στις κβαντικές μεταπτώσεις των ηλεκτρονίων που εκπέμπουν φωτόνια σε στατικό μαγνητικό πεδίο (ακτινοβολία σύγχροτρον).

1.2 Το θεώρημα Liouville

Σύμφωνα με το θεώρημα του Liouville, ο όγκος που περικλείεται από μια υπερ-επιφάνεια στο χώρο των φάσεων **παραμένει σταθερός** κάτω από κανονικό μετασχηματισμό. Αυτό σημαίνει ότι αν οι μεταβλητές p,q αντικατασταθούν από τις P,Q μέσω κανονικού μετασχηματισμού, τότε οι όγκοι των αντίστοιχων περιοχών στον χώρο των p,q και P,Q είναι ίσοι:

$$\int.....\int dq_1...dq_r dp_1....dp_r = \int.....\int dQ_1...dQ_r dP_1....dP_r \quad (1.2.1)$$

Απόδειξη:

Ο μετασχηματισμός δίδεται μέσω της σχέσης:

$$\int.....\int Ddq_1...dq_r dp_1....dp_r = \int.....\int dQ_1...dQ_r dP_1....dP_r \quad (1.2.2)$$

όπου D είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού, η οποία ορίζεται μέσω της σχέσης:

$$D = \frac{\partial(Q_1,...,Q_r,P_1,...,P_r)}{\partial(q_1,...,q_r,p_1,...,p_r)} \quad (1.2.3)$$

Για να αποδείξουμε την σχέση (1.2.1) αρκεί να δείξουμε ότι η ορίζουσα της Ιακωβιανής είναι ίση με τη μονάδα.

Σύμφωνα με γνωστή ιδιότητα των Ιακωβιανών οριζουσών, θα έχουμε:

$$\det|D| = \frac{\left|\frac{\partial(Q_1,...,Q_r,P_1,...,P_r)}{\partial(q_1,...,q_r,Q_1,...,Q_r)}\right|}{\left|\frac{\partial(q_1,...,q_r,p_1,...,p_r)}{\partial(q_1,...,q_r,Q_1,...,Q_r)}\right|} \quad (1.2.4)$$

Μεταθέτοντας αμοιβαία r ζεύγη γραμμών, η ορίζουσα στον αριθμητή γράφεται:

(1.2.5)

ενώ η ορίζουσα στον παρονομαστή παίρνει τη μορφή:

$$\left|\frac{\partial(q_1,...,q_r,p_1,...,p_r)}{\partial(q_1,...,q_r,Q_1,...,Q_r)}\right| = \left|\frac{\partial(p_1,...,p_r)}{\partial(Q_1,...,Q_r)}\right| \quad (1.2.6)$$

Για κανονικό μετασχηματισμό πρώτου τύπου έχουμε:

$$\left|\frac{\partial(P_1,...,P_r}{\partial(q_1,...,q_n}\right| = \det\left|-\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial q_j}\right| = (-1)^r \det\left|\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial q_j}\right| \quad (1.2.7)$$

και :

$$\left|\frac{\partial(p_1,...,p_r}{\partial(Q_1,...,Q_n}\right| = \det\left|\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial q_j}\right| \quad (1.2.8)$$

όπου F είναι η αντίστοιχη γενέτειρα συνάρτηση και επί πλέον:

$$\det\left|\frac{\partial^2 F}{\partial Q_i \partial q_j}\right| \neq 0 \quad (1.2.9)$$

ώστε τελικά, να είναι:

$$\det|D| = (-1)^{2r} = 1 \quad (1.2.10)$$

Αν και ο όγκος που περικλείεται από μια υπερ-επιφάνεια διατηρείται στο χώρο των φάσεων κατά την χρονική εξέλιξη,η υπερ-επιφάνεια αυτή δεν είναι απαραίτητο να έχει το ίδιο σχήμα.Έτσι λοιπόν εάν, στο δισδιάστατο χώρο φάσεων, είχαμε μία έλλειψη να περικλείει συγκεκριμένο όγκο, με την πάροδο του χρόνου η περιβάλλουσα καμπύλη θα άλλαζε σχήμα, πάντα όμως με τη συνθήκη να περιβάλλει τον ίδιο όγκο.

Επιπλέον, όγκοι μέσα σε υποχώρους που αντιστοιχούν σε ένα μέρος των βαθμών ελευθερίας δεν διατηρούνται, εν γένει. Δηλαδή, όγκοι σε εγκάρσιους ή διαμήκες χώρους φάσεων δεν διατηρούνται, γενικά.

Μια άμεση συνέπεια του συγκεκριμένου θεωρήματος καθώς και της διατήρησης των σωματιδίων είναι το γεγονός ότι η πυκνότητα φάσης σε σημείο M(t) είναι η ίδια με αυτή στο μετασχηματισμένο σήμειο M(t'), σε κάποια άλλη χρονική στιγμή. Δηλαδή:

$$f(\vec{q}(t),\vec{p}(t),t) = f(\vec{q}(t'),\vec{p}(t'),t') \quad (1.2.11)$$

Η παραπάνω πρόταση ισχύει όταν δεν υπάρχουν απώλειες δέσμης (ή είναι αμελητέες).

Το θεώρημα του Liouville προέρχεται από τις ιδιότητες του κανονικού μετασχηματισμού και των εξισώσεων κίνησης που προέρχονται από τη μορφή της χαμιλτονιανής και δεν εξαρτάται από τον αριθμό των σωματιδίων αυτών καθ'αυτών.

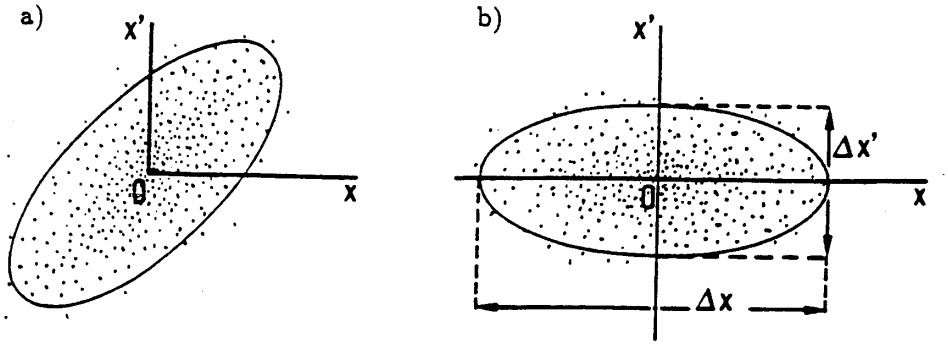
1.3 Emittance Δέσμης

Εάν κανείς αγνοήσει τις αμοιβαίες αλληλεπιδράσεις και την εξάρτηση μεταξύ των τριών συντεταγμένων ενός σωματίδιου, τότε μπορεί να ορίσει την emittance για κάθε βαθμό ελευθερίας: κάθετο, οριζόντιο και διαμήκες.

Η οριζόντια και η κάθετη emittance συνήθως ορίζονται στο χώρο των φάσεων που οι συντεταγμένες, αντί για x , p_x είναι οι x, x'=dx/ds . Το x' εκφράζει τη γωνιακή απόκλιση του σωματιδίου σε σχέση με τον άξονα της δέσμης, ενώ το x είναι η μετατόπιση. Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι αντιπροσωπευτικά σημεία σωματιδίων με το ίδιο πλάτος, αλλά με διαφορετικές μετατοπίσεις φάσης ανήκουν στην ίδια έλλειψη, σε κάποια δεδομένη χρονική στιγμή, ένω ελλείψεις με διαφορετικά κέντρα αντιστοιχούν σε διαφορετικά πλάτη.

Γεωμετρικά, ορίζουμε την emittance ε_x ως το εμβαδό εκείνης της έλλειψης που περιέχει το 95% του συνόλου των σωματιδίων. Η συνθήκη του 95% είναι κάπως αυθαίρετη, αφού κανείς θα μπορούσε να θέσει διαφορετικό όριο (μεγαλύτερο ή μικρότερο).

Μια σχηματική αναπαράσταση των παραπάνω φαίνεται στο σχήμα 1:



Σχήμα 1: Σύνολο σημείων αντιπροσωπευτικών μιας δέσμης στο (x,x΄) χώρο φάσεων. Η έλλειψη εκφράζει την emittance της δέσμης

Έτσι λοιπόν, η μαθηματική (γεωμετρική) έκφραση της emittance θα δίδεται μέσω του εμβαδού της έλλειψης:

$$\varepsilon_x = \pi ab \quad (1.3.1)$$

όπου α,b είναι ο μεγάλος και ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Συνήθως, το παραπάνων γινόμενο διαιρείται με π, ώστε η emittance να δίδεται απευθείας από το γινόμενο των δύο ημιαξόνων.

Στην περίπτωση της σχετικιστικής κίνησης, η ορμή p_x δίδεται από τη σχέση:

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = m\gamma\dot{x} \quad (1.3.2)$$

όπου

m: η μάζα ηρεμίας

v: η γραμμική ταχύτητα κίνησης

$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = v$: η γραμμική ταχύτητα κίνησης και

$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$: ο παράγοντας Lorentz και $\beta = \frac{v}{c}$

Αλλά:

$$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{ds}.\frac{ds}{dt} = x' \cdot v = x' \beta c \quad (1.3.3)$$

Οπότε η σχέση (1.3.1) μας δίνει την αναλογία της κλίσης x' με την συζυγή ορμή p_x:

$$p_x = m\gamma\beta c x' \quad (1.3.4)$$

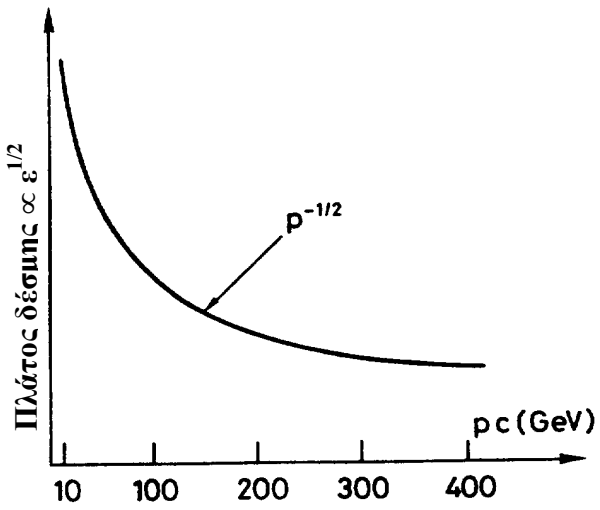
Σε μια γραμμή μεταφοράς ή σε έναν δαχτύλιο χωρίς επιτάχυνση, η ενέργεια ενός σωματιδίου που δεν ακτινοβολεί διατηρείται σταθερή. Οπότε, από το θεώρημα του Liouville έχουμε διατήρηση και της emittance, παρόλου που η δέσμη περνά από φακούς εστίασης και απόκλισης. Στην περίπτωση όμως που έχουμε μεταβολή στην ενέργεια του σωματιδίου (όπως πράγματι συμβαίνει στους γραμμικούς ή κυκλικούς επιταχυντές) η emittance δεν παραμένει αναλλοίτωτη. Για το λόγο αυτό, κανείς ορίζει την κανονικοποιημένη emittance ως:

$$\varepsilon_{xN} = \beta\gamma\varepsilon_x \quad (1.3.5)$$

Η κανονικοποιημένη emittance αναφέρεται πλέον στο χώρο φάσης x,p_x και μάλιστα διατηρείται κατά τη διάρκεια της επιτάχυνσης.

Καθώς το γινόμενο βγ είναι ανάλογο της ορμής p_x, η emittance, κατά την επιτάχυνση μειώνεται $\sim 1/(\beta\gamma)$ ή διαφορετικά $\sim 1/p$, ενώ η μετατόπιση και η γωνιακή απόκλιση ως $p^{-1/2}$. Το φαινόμενο αυτό ονομάζεται αδιαβατική συρρίκνωση (adiabatic damping) (βλέπε σχήμα 2)

Για το λόγο αυτό, κατά την είσοδο των σωματιδίων στο εσωτερικό του επιταχυντή, απαιτείται η πλήρης σχισμή εισόδου και ο σχεδιασμός αυτός είναι σημαντικός. Εξαιτίας της αδιαβατικής συρρίκνωσης, σε επιταχυντές με μεγάλη ενέργεια έχουμε παραγωγή μικρότερων δεσμών και έτσι αντισταθμίζεται κατά κάποιον τρόπο η μείωση την ενεργού διατομής των σωματιδίων που επιφέρει η αύξηση της ενέργειας.



Σχήμα 2: Αδιαβατική συρρίκνωση

Με ανάλογο τρόπο, η διαμήκης emittance εκφράζεται από το γινόμενο της διασποράς της ενέργειας δΕ και τις διασποράς της φάσης δφ. Από τον ορισμό της, η μεταβλητή δράσης J της συγκεριμένης τροχιάς θα είναι:

$$J = \frac{1}{2\pi} \oint \delta E d(\delta\phi) \quad (1.3.6)$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται κατά μήκος της φασικής τροχιάς του συστήματος για μια περίοδο περιστροφής

2. Πορτραίτα Φάσης

Αν και τα διαγράμματα φάσης μας δίνουν τη χρονική εξέλιξη ενός συστήματος, πολλές φορές ενδιαφερόμαστε για την τοπολογική δομή των τροχιών στο χώρο των φάσεων. Η δυναμική λοιπόν ενός συστήματος αναδύεται μέσω των πορτραίτων φάσης, τα οποία σχηματίζονται από όλες τις δυνατές τροχιές. Από τα πορτραίτα φάσης μπορούμε να δούμε εάν υπάρχει κατάσταση ευσταθούς ισορροπίας (κυκλικές τροχιές γύρω από ένα κέντρο) ή κατάσταση ασταθούς ισορροπίας (αποκλίνουσες τροχιές, π.χ υπερβολές) και άλλες δυναμικές καταστάσεις.

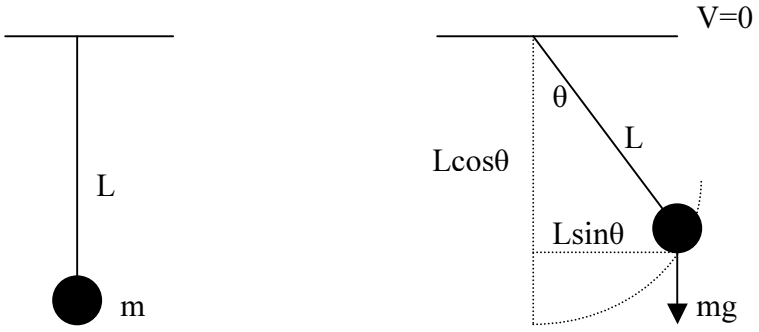
Τα πορτραίτα φάσης είναι ιδιαίτερα σημαντικά σε μη γραμμικά συστήματα, όταν δεν υπάρχει αναλυτική λύση των εξισώσεων κίνησης. Αν και οι επιταχυντές σωματιδίων κατασκευάζονται για γραμμικά συστήματα, ωστόσο υπάρχουν (έστω και μικρές) αποκλίσεις από τη γραμμικότητα, οι οποίες επιβάλλουν τη μελέτη της δυναμικής του συστήματος με τη βοήθεια των πορτραίτων φάσης.

Παρακάτω θα αναφέρουμε την κατασκευή των πορτραίτων φάσης στο απλό μηχανικό παράδειγμα του μη-γραμμικού εκκρεμούς και θα δούμε παραδείγματα από πορτραίτα φάσης στη φυσική των επιταχυντών.

2.1 Το μη γραμμικό εκκρεμές

Στην περίπτωση της μη γραμμικής κίνησης, θεωρούμε ότι οι δυνάμεις που επιδρούν στο σώμα είναι **μη γραμμική** συνάρτηση των παραμέτρων θέσης. Για παράδειγμα, σε ένα οριζόντιο ελατήριο, η δύναμη επαναφοράς είναι ανάλογη του **τετραγώνου** της απομάκρυνσης.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται η περίπτωση ενός εκκρεμούς:



Σχήμα 3: Απλό εκκρεμές

Η Λαγκραζιανή του συστήματος είναι:

$$L = \frac{1}{2}mL^2\theta^2 + mgL\cos\theta \quad (2.1.1)$$

Οπότε, η εξίσωση κίνησης του είναι:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(mL^2\dot{\theta}) + mgL\sin\theta = 0 \Rightarrow mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL\sin\theta = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2 \sin\theta = 0 \quad (2.1.2)$$

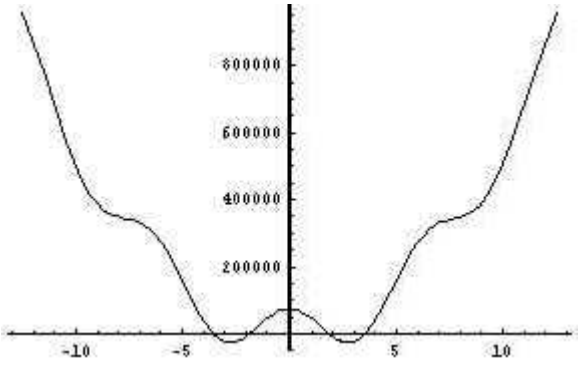
όπου :

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \quad (2.1.3)$$

με L να είναι το μήκος του νήματος και g η επιτάχυνση της βαρύτητας.

Η υπάρξη λοιπόν του ημιτόνου επιφέρει τη μη γραμμικότητα της ταλάντωσης και μάλιστα για μεγάλες γωνίες (>15^o).

Στο σχήμα 4 φαίνεται η γραφική παράσταση της δυναμικής ενέργειας ενός τέτοιου συστήματος, η οποία δεν είναι παραβολή, όπως στη γραμμική περίπτωση.



Σχήμα 4: Η δυναμική ενέργεια συναρτήσει της γωνίας σε μη γραμμικό εκκρεμές.

Μπορούμε να μεταπηδήσουμε στη γραμμική προσέγγιση εάν θεωρήσουμε κίνηση σε πολύ μικρές γωνίες, οπότε το ημίτονο της γωνίας θ προσεγγίζεται με την ίδια τη γωνία (εκφρασμένη σε rad). Τότε η εξίσωση κίνησης θα είναι:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (2.1.4)$$

Η κινητική ενέργεια του συστήματος είναι:

$$T = \frac{1}{2}mu^2 = \frac{1}{2}mL^2\theta^2 = \frac{1}{2mL^2}p_\theta^2 \quad (2.1.5)$$

αφού: $p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = mL^2\dot{\theta}$ (2.1.6)

ενώ η δυναμική (με επίπεδο αναφοράς , όπως φαίνεται στο σχήμα 3)

$$V = -mgL\cos\theta \quad (2.1.7)$$

Τότε λοιπόν η χαμιλτονιανή του συστήματος θα είναι:

$$H = \frac{1}{2mL^2} p_\theta^2 - mgL\cos\theta \quad (2.1.8)$$

και οι αντίστοιχες εξισώσεις, με γενικευμένες τις μεταβλητές p_θ και θ, θα είναι:

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \dfrac{\partial H}{\partial p_\theta} \\ \dot{p}_\theta = -\dfrac{\partial H}{\partial \theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{d\theta}{dt} = \dfrac{p_\theta}{mL^2} \\ \dfrac{dp_\theta}{dt} = -mgL\sin\theta \end{cases} \quad (2.1.9)$$

Από την πρώτη εκ των δύο παραπάνω παίρνουμε:

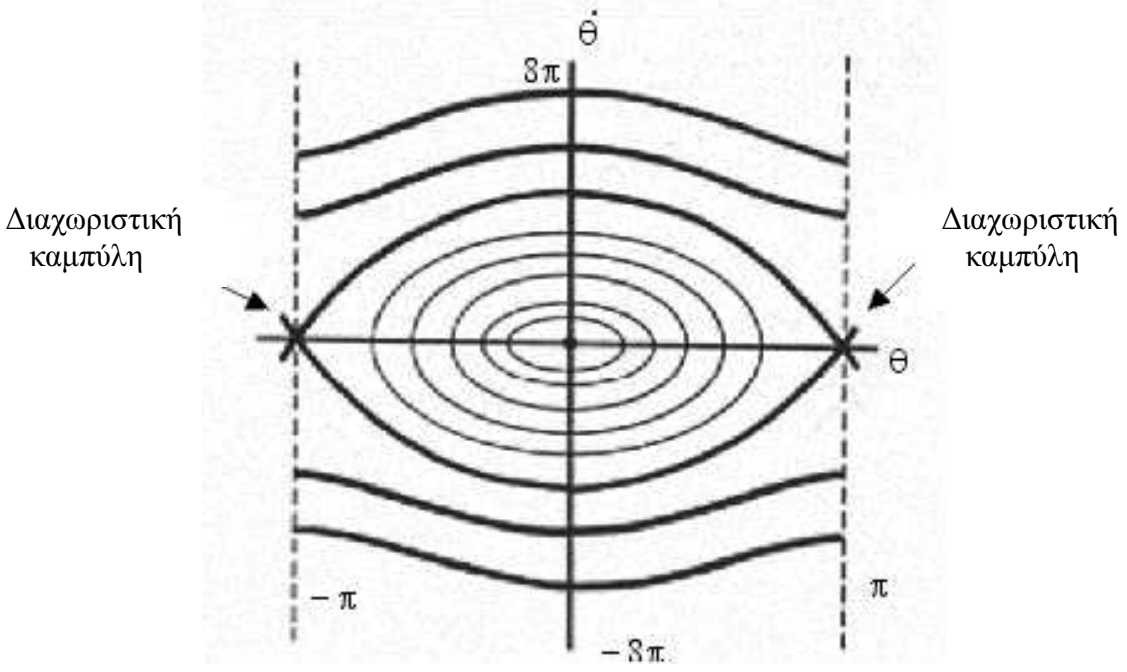
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{1}{mL^2}\frac{dp_\theta}{dt} \Rightarrow mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgL\sin\vartheta \Rightarrow mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2} + mgL\sin\vartheta = 0 \quad (2.1.10)$$

Στο σχήμα 5 παρουσιάζεται το διάγραμμα φάσης για το μη γραμμικό εκκρεμές.

Από το διάγραμμα φάσης, παρατηρούμε ότι για μικρά πλάτη (εσωτερικές τροχιές) οι τροχιές φάσης είναι ελλείψεις κεντραρισμένες στην αρχή. Είναι το σημείο **ευσταθούς ισορροπίας** με το εκκρεμές να είναι κάθετο χωρίς να ταλαντώνεται.

Το δεύτερο σημείο ισορροπίας είναι εκείνο όπου το εκκρεμές είναι κάθετο, με γωνία θ=π και dθ/dt=0. Είναι σημείο **ασταθούς ισορροπίας** και εμφανίζεται στο διάγραμμα σαν σαγματικό σημείο. Η τροχιά που αντιστοιχεί ονομάζεται **διαχωριστική καμπύλη** (separatrix).

Οι κυμματιστές γραμμές πάνω και κάτω από τη διαχωριστική καμπύλη αντιστοιχούν στην περιστροφική κίνηση του εκκρεμούς.



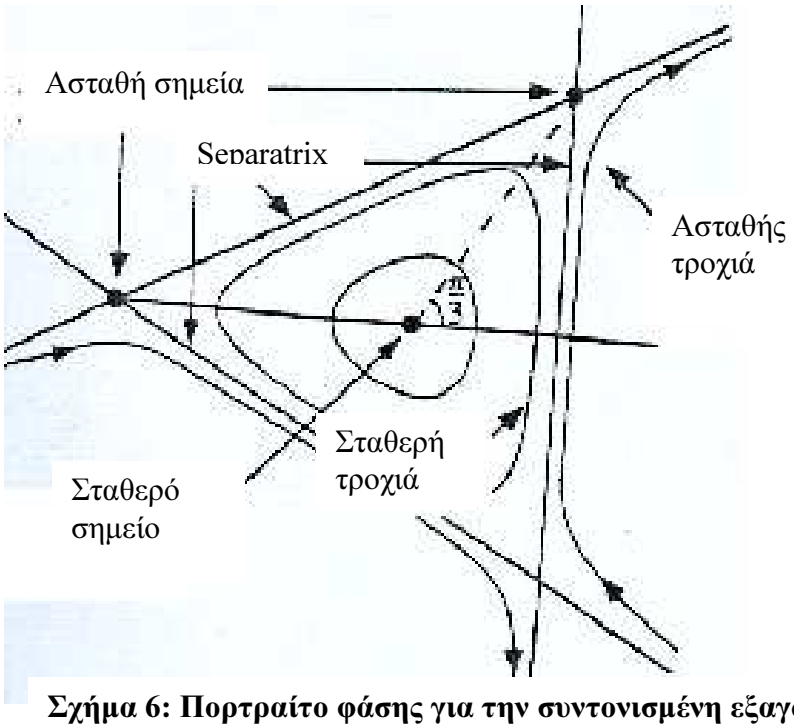
Σχήμα 5 Διάγραμμα φάσης ενός μη γραμμικού εκκρεμούς σε επίπεδο. Οι τροχιές είναι καμπύλες σταθερής ενέργειας

2.2 Παραδείγματα των πορτραίτων φάσης στη φυσική των επιταχυντών

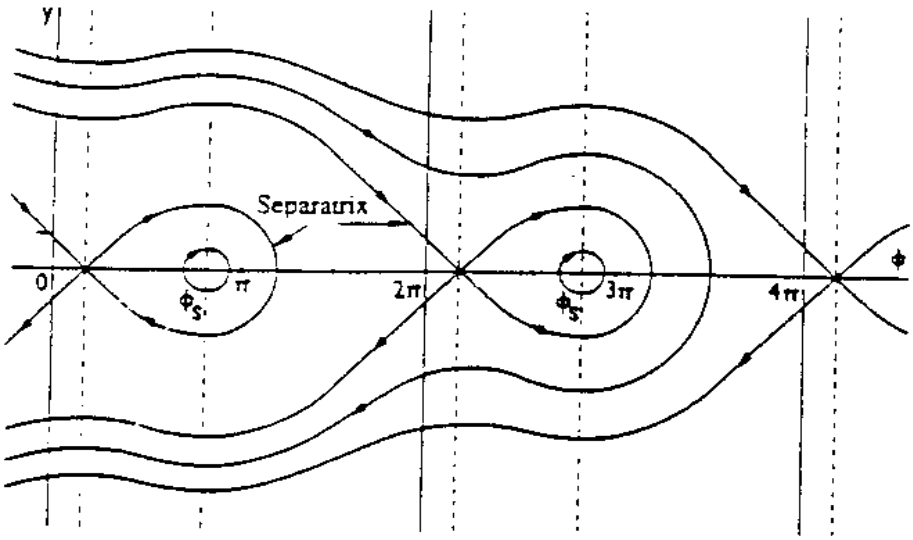
Το σχήμα 6 δείχνει το πορτραίτο φάσης για την περίπτωση της συντονισμένης εξαγωγής, στο χώρο της δράσης J και της φάσης φ.

Στο σχήμα 7 φαίνεται το πορτραίτο φάσης για την κίνηση σύγχροτρον. Το πορτραίτο φάσης εξαρτάται από την φάση της ραδιοσυχνότητας του σωματιδίου.

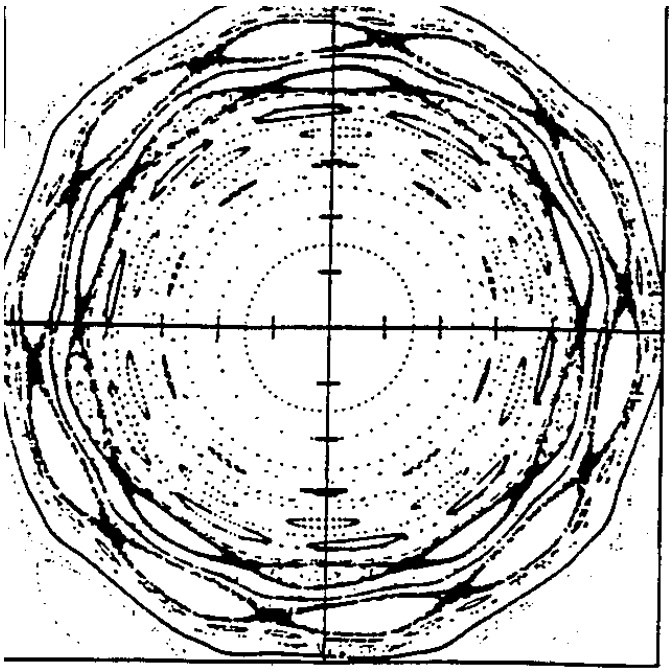
Τέλος, στο σχήμα 8 δίδεται το πορτραίτο φάσης για την κίνηση στο βήτατρον, η οποία διαταράσεται από μια μη γραμμική δύναμη μεταξύ των δεσμών.



Σχήμα 6: Πορτραίτο φάσης για την συντονισμένη εξαγωγή



Σχήμα 7: Πορτραίτο φάσης για την κίνηση σύγχροτρον ($\pi/2<\varphi_S<\pi$)



Σχήμα 8: Πορτραίτο φάσης της κίνησης βήτατρον διαταρρασόμενης από δύναμη μεταξύ των δεσμών

3. Στατιστική θεμελίωση της emittance δέσμης σωματιδίων

Η emitance μιας δέσμης μπορεί να παρομοιαστεί με την τυπική απόκλιση μιας διασποράς συνόλου Ν σημείων. Η τυπική απόκλιση σε μια τέτοια περίπτωση δίδεται από τη σχέση:

$$\sigma^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x})^2 \qquad (3.1)$$

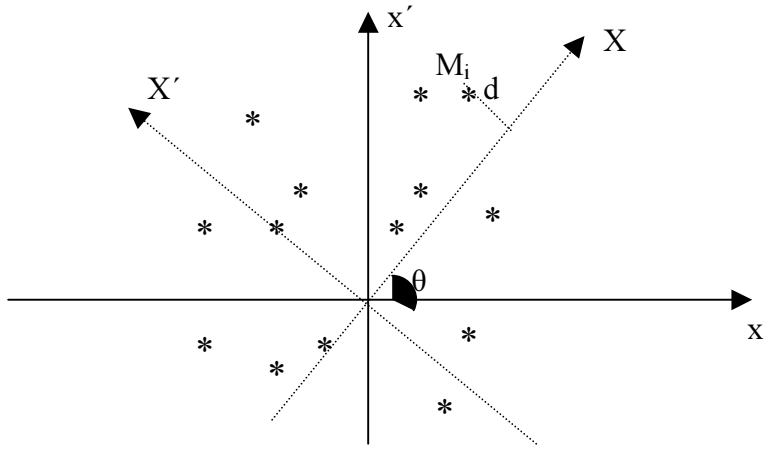
όπου $\bar{x}$ είναι η μέση τιμή της τετμημένης xi κάθε σημείου:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i \qquad (3.2)$$

Σε αντίθεση με την 1η ενότητα, όπου ορίσαμε την emittance γεωμετρικά, χρησιμοποιώντας μια συγκεκριμένη κλειστή διαδρομή που περικλείει αυθαίρετο αριθμό σωματιδίων, η στατιστική θεμελίωση της emittance ξεπερνά την αυθαιρεσία της κλειστής διαδρομής και του αριθμού των σωματιδίων, αλλά και τη δυσκολία που αυτό φέρνει όσο περνά ο χρόνος, με την έννοια ότι ο γεωμετρικός ορισμός της emittance δε λαμβάνει υπόψιν την αλλαγή της διάχυσης με τον χρόνο.

3.1 Ο στατιστικός ορισμός της emittance

Έστω μία κατανομή Ν σημείων M(x,x') στο χώρο των φάσεων όπως φαίνεται στο σχήμα 9



Σχήμα 9: Η απόσταση d_i σε άξονα με πολική γωνία θ

Επιλέγουμε την αρχή Ο του συστήματος συντεταγμένων, ώστε αυτή να συμπίπτει με το κέντρο βάρους των σημείων, οπότε οι μέσες τιμές $\bar{x}, \bar{x'}$ να μηδενίζονται.

Μπορούμε να περιστρέψουμε τους δύο άξονες κατά γωνία θ και να πάρουμε δύο νέους X, X'. Η επιλογή της γωνίας περιστροφής γίνεται, ώστε να ελαχιστοποιήσουμε ή να μεγιστοποιήσουμε το άθροισμα των τετραγώνων των αποστάσεων τους από τους άξονες αυτούς.

Ο μετασχηματισμός θα δίνεται κατά τα γνωστά από τις σχέσεις:

$$\begin{pmatrix} X \\ X' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} X = x\cos\theta + x'\sin\theta \\ X' = -x\sin\theta + x'\cos\theta \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Η απόσταση di θα είναι το μέτρο του X'. Δηλαδή:

$$d_i = |X'| = |x'_i \cos\theta - x_i \sin\theta| \quad (3.1.2)$$

Η μέση τιμή του αθροίσματος των τετραγώνων των αποστάσεων θα είναι:

$$\sigma^2_{X'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} d_i^2 \quad (3.1.3)$$

και αυτό ζητούμε να ελαχιστοποιήσουμε ως προς τη γωνία θ: $\frac{\partial}{\partial\theta}\sigma^2_{X'} = 0$. Κάνουμε τις πράξεις:

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\sigma^2_{X'} = 0 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial\theta}\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i'^2\cos^2\theta + x_i^2\sin^2\theta - 2x_i' x_i \sin\theta\cos\theta)\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left[-2x_i'^2\cos\theta\sin\theta + 2x_i^2\cos\theta\sin\theta - 2x_i' x_i\left(-\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\right] = 0$$

$$\Rightarrow -\sin\theta\cos\theta\overline{x'^2} + \sin\theta\cos\theta\overline{x^2} - \cos 2\theta\overline{xx'} = 0 \Rightarrow (\overline{x^2} - \overline{x'^2})\sin 2\theta - 2\cos 2\theta\overline{xx'} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \tan 2\theta = \frac{2\overline{xx'}}{(\overline{x^2} - \overline{x'^2})}$$

όπου έχουμε ορίσει τις εξής μεταβλητές:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2, \overline{x'^2} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'^2_i, \overline{xx'} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i x_i' \quad (3.1.4)$$

Από τα παραπάνω παίρνουμε δύο ακρότατες τιμές για το τετράγωνο της τυπικής απόκλισης:

$$\sigma^2 = \frac{1}{2}\left(\overline{x^2} + \overline{x'^2} \pm \frac{2\overline{xx'}}{\sin 2\theta}\right) \quad (3.1.5)$$

Η τιμή με το (+) πρόσημο αντιστοιχεί στο σ_X^2 και εκφράζει τη διασπορά των σημείων στην κατεύθυνση του X άξονα, ενώ η τιμή με το (-) πρόσημο αντιστιχεί στο $\sigma_{X'}^2$ και εκφράζει τη διασπορά στον X'άξονα. Είναι λοιπόν φυσικό να ορίσουμε την emittance , δηλαδή τη διάχυση της διασποράς ως:

$$\varepsilon = 2\sigma_X^2 \cdot 2\sigma_{X'}^2 \quad (3.1.6)$$

Τα διπλάσσια γινόμενα μπαίνουν για περιλάβουν και την αρνητική κατεύθυνση των δύο αξόνων.

Εάν τώρα χρησιμοποιήσουμε τις τιμές των σ_X^2 και $\sigma_{X'}^2$ από τη σχέση (3.1.5) και θυμηθούμε ότι :

$$\sin^2 2\vartheta = \frac{\tan^2 2\theta}{1+\tan^2 2\theta} \quad (3.1.7.)$$

όπου το tan2θ το παίρνουμε από τη σχέση ελαχιστοποίησης , προκύπτει από τη σχέση (3.1.6) ότι:

$$\varepsilon = 4\sqrt{\overline{x^2}\cdot\overline{x'^2} - \left(\overline{xx'}\right)^2} \quad (3.1.8)$$

Η emittance που προκύπτει από την τελευταία σχέση ονομάζεται πολλές φορές και ενεργός emittance ή r.m.s emittance

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε από την στατιστική τον ορισμό του συντελεστή συσχέτισης:

$$r = \frac{\overline{xx'}}{\sqrt{\overline{x^2}\cdot\overline{x'^2}}} \quad (3.1.9)$$

και τους ορισμούς των τυπικών αποκλίσεων (μάλιστα στο κέντρο βάρους η μέση τιμή των συντεταγμένων θα είναι μηδέν) :

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^{\,2} = \overline{x^2} \quad (3.1.10)$$

και αντίστοιχα:

$$\sigma_{x'}^2 = \overline{x'^2} \quad (3.1.11)$$

η σχέση (3.1.8) δίνει:

$$\varepsilon = 4\sqrt{\overline{x^2}\cdot\overline{x'^2} - \left(\overline{xx'}\right)^2} = 4\sqrt{\overline{x^2}\cdot\overline{x'^2} - \left(r\sqrt{\overline{x^2}\cdot\overline{x'^2}}\right)^2} = 4\sqrt{\overline{x^2}\cdot\overline{x'^2}}\cdot\sqrt{1-r^2} = 4\sigma_x\sigma_{x'}\cdot\sqrt{1-r^2} \quad (3.1.12)$$

Εάν τώρα στην εξίσωση 3.1.8 αντικαταστήσουμε τις τιμές των $\overline{x^2}, \overline{x'^2}, \overline{xx'}$ από τους ορισμούς τους στη σχέση 3.1.4 παίρνουμε:

$$\varepsilon = 4\sqrt{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x'^2_i - \frac{1}{N^2}\left(\sum_{i=1}^{N} x_i x'_i\right)^2} = \frac{4}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} x'^2_i - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i x'_i\right)^2} =$$

$$= \frac{4}{N}\sqrt{\left(x_1^2 + x_2^2 + ...x_N^2\right)\left(x'^2_1 + x'^2_2 + ...x'^2_N\right) - \left(x_1^2 x'^2_1 + x_2^2 x'^2_2 + ...x_N^2 x'^2_N + 2x_1 x'_1\, x_2 x'_2 + 2x_2 x'_2\, x_3 x'_3 + ...\right)} =$$

$$= \frac{4}{N}\sqrt{x_1^2 x'^2_1 + x_2^2 x'^2_1 + ...x_N^2 x'^2_1 + ... - x_1^2 x'^2_1 - x_2^2 x'^2_2 - ...x_N^2 x'^2_N - 2x_1 x'_1\, x_2 x'_2 - 2x_2 x'_2\, x_3 x'_3 - ....}$$

Εάν προσέξουμε την παράσταση μέσα στη ρίζα θα παρατηρήσουμε ότι τελικά καταλήγουμε στην εξίσωση:

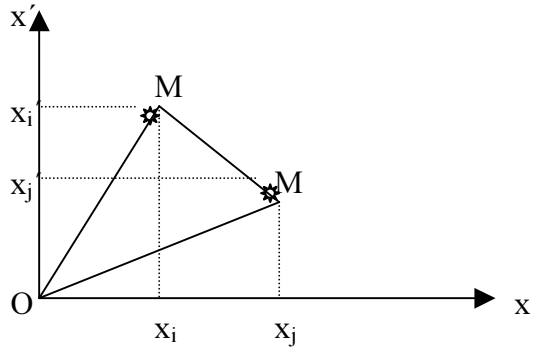
$$\varepsilon = \frac{4}{N}\sqrt{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i^2 x'^2_j + x_j^2 x'^2_i - 2x_i x_j x'_i\, x'_j)} \qquad (3.1.13)$$

όπου το ½ μπήκε, γιατί το άθροισμα οφείλει να γίνει για κάθε i≠j.

Τελικά καταλήγουμε στη σχέση:

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{N}\sqrt{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}(x_i x'_j - x_j x'_i)^2} \qquad (3.1.14)$$

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία Mi και Mj στο χώρο των φάσεων, όπως φαίνεται στο σχήμα 10



Σχήμα 10: Δύο σημεία στο χώρο φάσεων

Το εμβαδό του τριγώνου OMiMj θα είναι κατά τα γνωστά:

$$A_{ij} = \frac{1}{2}(x_i x'_j - x_j x'_i) \Rightarrow (x_i x'_j - x_j x'_i)^2 = 4A_{ij}^2 \qquad (3.1.15)$$

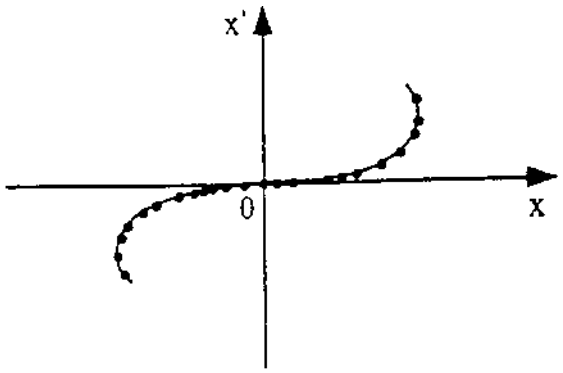
Τα τρίγωνα που σχηματίζονται από N τέτοια σημεία θα είναι N(N-1). Συνεπώς, η σχέση 3.1.14 με δεδομένη την 3.1.15 γίνεται:

$$\varepsilon = \frac{2\sqrt{2}}{N}\sqrt{2\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}A_{ij}{}^{2}} \qquad (3.1.16)$$

όπου διαιρέσαμε και με 2, γιατί και ζεύγος των σημείων εισέρχεται δύο φορές στο διπλό άθροισμα.

Κατ' αυτόν τον τρόπο ορίζεται η emittance ως η μέση τετραγωνική ρίζα του τετραγώνου του εμβαδού των σημείων Mi και Mj. Έτσι λοιπόν αυτή το μέσο στατιστικό εμβαδό είναι απαλλαγμένο από τον περιορισμό της περιβάλλουσας καμπύλης και είναι πλέον ένα μέτρο της κατανομής των σημείων γύρω από το κέντρο βάρους. Οπότε όταν η διασπορά των σημείων αυξάνει, αυξάνεται και η τιμή του τετραγώνου του εμβαδού

Ας δούμε τώρα το παράδειγμα της κατανομής σημείων πάνω σε μια καμπύλη γραμμή, όπως φαίνεται στο σχήμα 11.



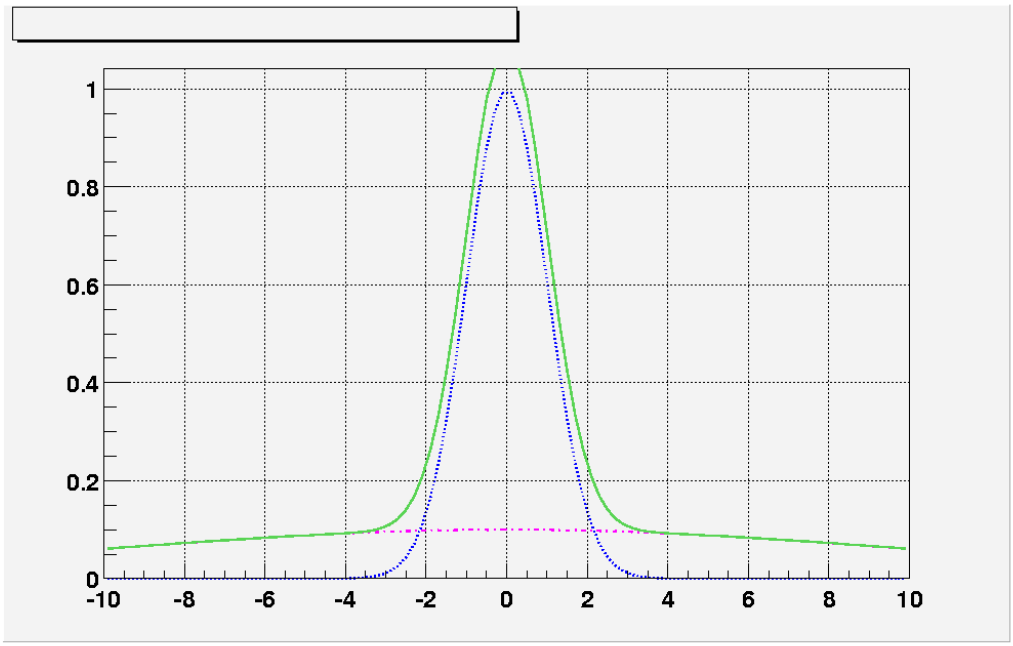
Σχήμα 11: Κατανομή σημείων σε καμπύλη γραμμή

Στην περιπτώση αυτή, εάν εξετάζαμε την emittance με τον γεωμετρικό τρόπο της κλειστής καμπύλης, θα λέγαμε ότι η emittance είναι μηδέν, αφού για μη ελλειπτική διαδρομή δεν έχουμε περιβαλλόμενα σημεία. Από την άλλη όμως, ο στατιστικός ορισμός της emittance δεν δίνει μηδέν, αλλά μια πεπερασμένη τιμή. Και οι δύο ορισμοί όμως δίνουν μηδενική τιμή της emittance για κατανομή πάνω σε μια ευθεία γραμμή, στο χώρο των φάσεων.

Οπότε θα πρέπει κανείς να είναι ιδιαίτερα προσεκτικός στον τρόπο χρήσης της emittance.

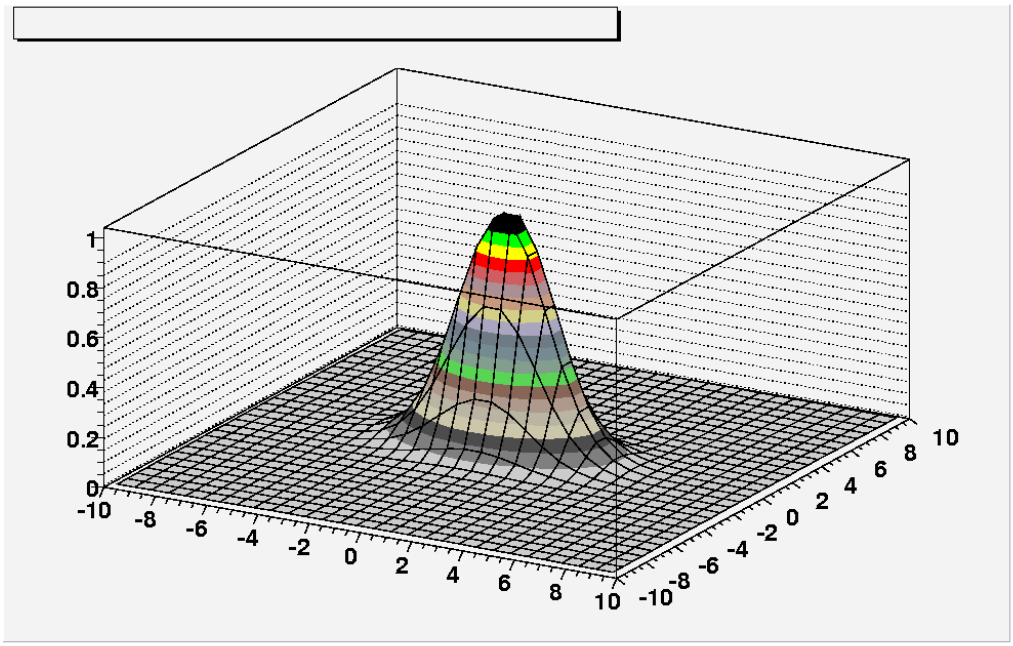
Θα πρέπει τέλος να σημειώσουμε ότι σημεία σε πολύ μεγάλες αποστάσεις από το κέντρο βάρους συνεισφέρουν σημαντικά στην στατιστική emittance. Εάν υπάρχει μια μακριά αλλά μικρή ουρά, η στατιστική emittance δεν εκφράζει ακριβώς τη διάχυση της κατανομής, αλλά την υπερεκτιμά.

Στην περίπτωση λοιπόν που έχουμε μακριές ουρές, δηλαδή σημεία πολύ μακριά από το κέντρο βάρους, η διάχυση εκφράζεται καλύτερα από το πλήρες πλάτος το μισό του μεγίστου (FWHM) από ότι μέσω της τυπικής απόκλισης. Το σχήμα 12 δείχνει μια μονοδιάσταση γκαουσιανή κατανομή με τυπική απόκλιση 1, πάνω στην οποία έχει προστεθεί μια γκαουσιανή ουρά κατά 10% με τυπική απόκλιση 10. Η ουρά αυξάνει την ολική τυπική απόκλιση κατά 29% ενώ το FWHM είναι μεγαλύτερο μόνο κατά 7%.



Σχήμα 12: Μπλε: Γκαουσιανή κατανομή με σ=1
Κόκκινη: Γκαουσιανή κατανομή με σ=10 και 10% εμβαδό της πρώτης.
Πράσινη: Άθροισμα των δύο παραπάνω

Στην περίπτωση των δύο διαστάσεων, η emittance μπορεί να εκφραστεί από την περιοχή που περικλείεται από την καμπύλη στο μισό του μεγίστου. Αυτό παρουσιάζεται στο σχήμα 13 όπου έχουμε μια δισδιάστατη γκαουσιανή κατανομή με τυπικές αποκλίσεις $\sigma_x = 2$ και $\sigma_{x'} = 1$ στην οποία επικάθεται 10% γκαουσιανή ουρά με τυπικές αποκλίσεις $\sigma_x = \sigma_{x'} = 10$



Σχήμα 13:Άθροισμα δισδιάστατης γκαουσιανής κατανομής με σ_x=2 και σ_y=1 και 10% γκαουσιανής ουράς με σ_x=σ_y=10.

Παρακάτω θα αναφερθούμε επιγραμματικά και μόνο και χωρίς την αναφορά σε εξισώσεις σε ορισμένα χαρακτηριστικά της emittance, όπως τη διατήρησή της, την αύξησή της λόγω χρωματισμού και σκέδασης ενώ θα αναφερθούμε και στο stochastic cooling.

3.2 Διατήρηση της emittance

Σε μία γραμμική κίνηση το κέντρο βάρους των διαφόρων σημείων παραμένει σε ηρεμία, εάν σε κάποια χρονική στιγμή συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Στην περίπτωση όμως που η κίνηση δεν είναι γραμμική, το κέντρο βάρους κινείται στο χώρο των φάσεων. Μάλιστα, η κίνησή του αυτή δεν διέπεται αναγκαστικά από τους ίδιους νόμους που χαρακτηρίζουν την κίνηση των αντίστοιχων σημείων. Έτσι, η emittance οριζόμενη ως το άθροισμα των εμβαδών A_{ij} δε διατηρείται, εκτός και αν η κίνηση είναι γραμμική. Μάλιστα, τις περισσότερες φορές **αυξάνει**. Ωστόσο, οι μη-γραμμικές κινήσεις δεν είναι επιθυμητές, γιατί βλάπτουν τη σταθερότητα της κίνησης των σωματιδίων μέσα στον επιταχυντή. Κατ' αυτόν τον τρόπο κανείς προσπαθεί να τις κρατήσει σε χαμηλά επίπεδα.

3.3 Αύξηση της emittance λόγω χρωματισμού και σκέδασης

Με την έννοια **χρωματισμός (chromaticity)** αναφερόμαστε στη μεταβολή της εστιακής δύναμης των μαγνητικών φακών με την ορμή των σωματιδίων. Ο χρωματισμός έχει ως αποτέλεσμα την μεταβολή της emittance μιας δέσμης. Το φαινόμενο αυτό εισάγει την ανάγκη για μια διόρθωση μεταξύ των x, x'και τη μεταβολής της ορμής $\Delta p/p$ και αυτό πετυχαίνεται με τη χρήση εξαπολικών φακών στην περιοχή διάχυσης.

Επιπλέον, υπάρχει αύξηση της emittance και λόγω των σκεδάσεων που λαμβάνουν χώρα μεταξύ των σωματιδίων, αλλά και λόγω των διακυμάνσεων λόγω ακτινοβολίας.

3.4 Stochastic Cooling

Η περίπτωση του stochastic cooling έχει ως σκοπό τη μείωση της στατιστικής διάχυσης των σωματιδίων στο χώρο των φάσεων. Βασίζεται δε σε διαδικασίες που δεν υπακούουν στη μηχανική Hamilton, οπότε δεν παραβιάζεται το θεώρημα του Liouville.

Η αρχή του stochastic cooling έχει ως εξής: Ένα ηλεκτρόδιο τοποθετημένο στην τροχιά της δέσμης επιλέγει ένα μικρό δείγμα n σωματιδίων από το σύνολο των N σωματιδίων της δέσμης ($n<<N$) και υπολογίζεται η μέση απόσταση $\bar{x}$, δηλαδή το κέντρο βάρους του δείγματος. Το σύμα στο ηλεκτρόδιο είναι ανάλογο του $\bar{x}$ και χρησιμοποιείται για την εφαρμογή ενός **διορθωτικού σήματος** σε ένα άλλο ηλεκτρόδιο τέτοιο, ώστε η x συντεταγμένη του κέντρου βάρους του δείγματος να διορθωθεί και τελικά να μειωθεί στο μηδέν, με την ολοκλήρωση της διόρθωσης. Αυτή η διαδικασία επαναλαμβάνεται πολλές φορές σε διαφορετικά δείγματα των σωματιδίων από την ίδια δέσμη με αποτέλεσμα τη μείωση της emittance της δέσμης αυτής.