Κβαντομηχανική του Φωτοηλεκτρικού Φαινομένου.

Ευστάθιος Κ. Στεφανίδης

Ιούνιος , 2002

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Με τον όρο **φωτοηλεκτρικό φαινόμενο** ονομάζουμε το φαινόμενο εκείνο κατά το οποίο ένα δέσμιο σύστημα ακτινοβολείται με κβάντα (φωτόνια) υψηλής ενέργειας, με αποτέλεσμα το 'σπάσιμο' του δέσμιου αυτού συστήματος. Στην περίπτωση των ατόμων έχουμε την πρόσπτωση φωτονίων σε δέσμια ατομικά ηλεκτρόνια με απότελεσμα την εκπομπή τους από το άτομο, ενώ στην περίπτωση των πυρήνων (**φωτοδιάσπαση**) έχουμε την πρόσπτωση φωτονίων σε πυρήνες με αποτέλεσμα τη διάσπαση αυτών.

Το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο ανακαλύφτηκε το 1887 από τον Heinrich Hertz κατά τη διάρκεια πειραμάτων του σχετικά με τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Σε περαιτέρω πειράματα κατόρθωσε να διαπιστώσει τα εξής:

1. Όταν στιλπνά μέταλλα ακτινοβολούνταν, εξέπεμπταν ηλεκτρόνια, τα οποία ανιχνεύτηκαν με μετρήσεις του λόγου e/m.

2. Η εκπομπή ή όχι των ηλεκτρονίων από τα μέταλλα εξαρτώταν από το μήκος κύματος του φωτός. Γενικά, υπήρχε ένα όριο που ποικίλε από μέταλλο σε μέταλλο και μόνο φωτόνια με ενέργειες πάνω από το όριο αυτό θα προκαλούσαν φωτοηλεκτρικό ρεύμα.

3. Το ρεύμα ήταν ανάλογο της έντασης της προσπίπτουσας ακτινοβολίας.

4. Η ενέργεια των φωτοηλεκτρονίων ήταν ανεξάρτητη από την ένταση της πηγής του φωτός, αλλά μεταβάλλονταν αναλόγως με τη συχνότητα του προσπίπτοντος φωτός.

Παρόλο που η κλασσική ηλεκτρομαγνητική θεωρία μπορούσε να ερνηνεύσει το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο (ήδη ήταν γνωστή η ύπαρξη των ηλεκτρονίων στα μέταλλα, οπότε θα μπορούσα να επιταχυνθούν με την απορρόφηση ακτινοβολίας), ωστόσο η εξάρτηση του φαινομένου από τη συχνότητα δεν ήταν απόλυτα κατανοητή, αφού η ενέργεια που μεταφέρει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι ανάλογη της έντασης της πηγής και όχι της συχνότητας.

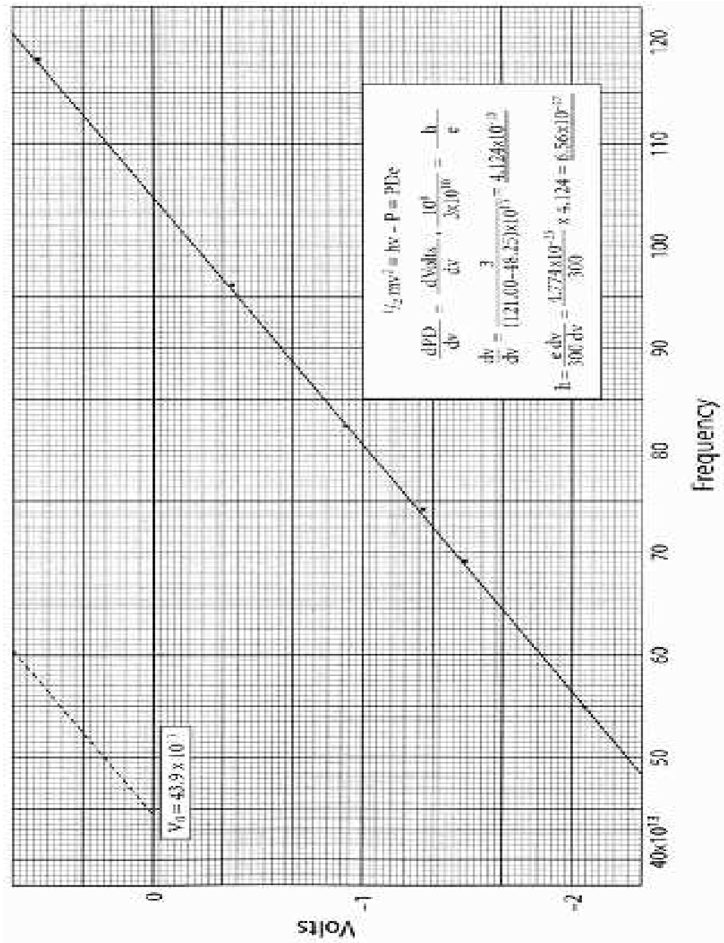
Το 1905, ο Einstein θεώρησε την ακτινοβολία να αποτελείται από μια συλλογή **κβάντων, ενέργειας** hf το καθένα, όπου f είναι η συχνότητα του φωτός. Η απορρόφηση ενός τέτοιου κβάντου από το ηλεκτρόνιο θα αυξήσει την ενέργειά του κατά hf. Ένα μέρος της ενέργειας οφείλει να δωθεί για το διαχωρισμό του ηλεκτρονίου από το μέταλλο. Το ποσό αυτό W (έργο εξαγωγής) αναμένεται να ποικίλει από μέταλλο σε μέταλλο, αλλά δεν θα πρέπει να εξαρτάται από την ενέργεια του ηλεκτρονίου. Το υπόλοιπο ποσό ενέργειας γίνεται κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου. Η αρχή διατήρησης της ενέργειας θα δώσει λοιπόν:

$$\frac{1}{2}mu^2 = hf - W$$

Η εξίσωση αυτή περιλαμβάνει την παράμετρο του κατωφλίου στη συχνότητα και τη γραμμική σχέση ανάμεσα στην κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου και στη συχνότητα. Η αναλογία μεταξύ ρεύματος και έντασης της πηγής μπορεί επίσης να κατανοηθεί με τη βοήθεια αυτών των κβάντων ενέργειας: περισσότερο ισχυρή πηγή φωτός εκπέμπει περισσότερα φωτόνια, τα οποία με τη σειρά τους ελευθευρώνουν περισσότερα ηλεκτρόνια.

Ο Robert A. Milikan, με σχολιστικά πειράματα, επιβεβαιώσε την εξίσωση του Einstein (σχήμα 1.1)

Τα πειράματα που έγιναν έδειξαν ότι το φως συμπεριφέρεται ως μια συλλογή σωματιδίων, τα οποία μπορούν να δρούν ανεξάρτητα. Επιπλέον, μπορούμε να εξάγουμε πληροφορίες για τα μέταλλα και για τις ιδιότητες αυτών.



Σχήμα 1.1: Τα πρωτότυπα δεδομένα (βλ. αναφορά [3]) για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο σε μέταλλο που δείχνουν, ισοδύναμα, την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων σαν συνάρτηση της συχνότητας του προσπίπτοντως φωτός. Η κλίση της γραμμής είναι h/e.

Κεφάλαιο 2

Διαφορική Ενεργός Διατομή για το Φωτοηλεκτρικό Φαινόμενο

Έστω η διαδικασία:

$$\gamma + (\alpha\tau o\mu o) \rightarrow (\alpha\tau o\mu o)' + e$$

Ο ρυθμός μετάβασης από την αρχική στην τελική κατάσταση θα δωθεί από τον χρυσό κανόνα του Fermi:

$$R = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M_{fi}|^2 \prod \frac{V d^3 p_k}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left(E_\gamma - E_B - E_e \right) \tag{2.1}$$

όπου:
$E_\gamma = \hbar\omega$: η ενέργεια του προσπίπτοντος φωτονίου
E_B : η ενέργεια σύνδεσης του ηλεκτρονίου στο άτομο
$E_e = \frac{p_e^2}{2m_e}$: η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Η συνάρτηση δ της εξίσωσης (2.1) εξασφαλίζει τη διατήρηση της ενέργειας. Οπότε:

$$R = \frac{2\pi}{\hbar} \int |M_{fi}|^2 \prod \frac{V d^3 p_e}{(2\pi\hbar)^3} \delta \left(\hbar\omega - E_B - \frac{p_e^2}{2m_e} \right)$$

Αλλά, σε σφαιρικές συντεταγμένες, ειναι:

$$d^3 p_e = p_e^2 \sin\theta d\theta d\phi dp_e = p_e^2 d\Omega dp_e$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
R = & \quad \frac{2\pi}{\hbar}\int |M_{fi}|^2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} p_e^2 d\Omega dp_e \delta\left(\hbar\omega - E_B - \frac{p_e^2}{2m_e}\right) & = \\
= & \quad \frac{2\pi}{\hbar}\int |M_{fi}|^2 \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} m_e p_e d\Omega d\left(\frac{p_e^2}{2m_e}\right)\delta\left(\hbar\omega - E_B - \frac{p_e^2}{2m_e}\right) & \Rightarrow \\
\Rightarrow & \quad R = \frac{2\pi V}{\hbar}\int |M_{fi}|^2 \frac{m_e p_e}{(2\pi\hbar)^3} d\Omega &
\end{aligned} \tag{2.2}$$

όπου :

$$p_e = \sqrt{2m_e\left(\hbar\omega - E_B\right)} \tag{2.3}$$

το οποίο προκύπτει από το μηδενισμό της δ-συνάρτησης.

Εάν η συνθήκη κανονικοποίησης δέχεται 1 φωτόνιο/όγκο (N=1), τότε το στοιχείο πίνακα θα δίδεται απο τη σχέση:

$$M_{fi} = \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle$$

Στο παράρτημα υπολογίζεται η χαμιλτονιανή αλληλεπίδρασης, η οποία προκύπτει να είναι:

$$H_{int} = \frac{e}{mc}\left(\frac{2\pi c^2 \hbar N}{\omega V}\right)^{1/2} \overrightarrow{\varepsilon}.\overrightarrow{p}.e^{i(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}-\omega t)}$$

Συνεπώς, το στοιχείο πίνακα θα είναι:

$$M_{fi} = \langle \Psi_f | H_{int} | \Psi_i \rangle = \frac{e}{mc}\left(\frac{2\pi c^2 \hbar N}{\omega V}\right)^{1/2} \int \Psi_f^*(\overrightarrow{r})\overrightarrow{\varepsilon}\,\overrightarrow{p} e^{i(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r})}\Psi_i(\overrightarrow{r}) d^3 r \tag{2.4}$$

όπου $\Psi_f(\overrightarrow{r})$ και $\Psi_i(\overrightarrow{r})$ είναι η τελική και η αρχική κυματοσυνάρτηση του ηλεκτρονίου.

Για υδρογονοειδή άτομο, με το ηλεκτρόνιο να βρίσκεται στη βασική στάθμη, η αρχική κυματοσυνάρτηση θα είναι:

$$\Psi_i(\overrightarrow{r}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{Z}{a_o}\right)^{3/2} e^{-Zr/a_0} \tag{2.5}$$

όπου Z είναι ο ατομικός αριθμός του ατόμου και a_o είναι η κλασσική ακτίνα Bohr.

Εάν τώρα θεωρήσουμε προσπίπτον φωτόνιο με ενέργεια πολύ μεγαλύτερη από την ενέργεια ιονισμού του ατόμου, το ηλεκτρόνιο θα απομακρυνθεί πέρα του ηλεκτρικού πεδιου του ατόμου, δε θα υφίσταται επίδραση απ΄ αυτό και κατά συνέπεια, θεωρούμε ότι η τελική κυματοσυνάρτησή του είναι επίπεδο κύμα της μορφής:

$$\Psi_f(\vec{r}) = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p_e}\vec{r}} \tag{2.6}$$

Θα πρέπει να σημειώσουμε ότι η σταθερά κανονικοποίησης $\frac{1}{\sqrt{V}}$ προσδιορίζεται έτσι, ώστε να έχουμε πάλι ένα ηλεκτρόνιο ανά όγκο.

Επειδή όμως η τελική κατάσταση είναι ιδιοκατάσταση της ορμής, θα είναι:

$$\left\langle f \left| \vec{\varepsilon}\vec{p_e} e^{i\vec{k}\vec{r}} \right| i \right\rangle = \vec{\varepsilon}\vec{p_e} \left\langle f \left| e^{i\vec{k}\vec{r}} \right| i \right\rangle \tag{2.7}$$

Από την (2.4) θα πάρουμε λοιπόν:

$$|M_{fi}|^2 = \left(\frac{e}{mc}\right)^2 \left(\frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V}\right) \left[\int d^3r \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{p_e}\vec{r}} \vec{\varepsilon}\vec{p_e} e^{i\vec{k}\vec{r}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^{3/2} e^{-\frac{Zr}{a_o}}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |M_{fi}|^2 = \frac{e^2}{m^2c^2} \frac{2\pi\hbar c^2}{\omega V} \frac{1}{V} (\vec{\varepsilon}\vec{p_e})^2 \frac{1}{\pi} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^3 \left[\int d^3\vec{r} e^{i\left(\vec{k} - \frac{\vec{p_e}}{\hbar}\right)\vec{r}} e^{-\frac{Zr}{a_o}}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |M_{if}|^2 = \frac{2e^2\hbar}{\omega V^2 m^2} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^3 (\vec{\varepsilon}\vec{p_e})^2 \left[\int d^3r e^{i\left(\vec{k} - \frac{\vec{p_e}}{\hbar}\right)\vec{r}} e^{-\frac{Zr}{a_o}}\right]^2 \tag{2.8}$$

Για να έχουμε ροή ίση με 1 φωτόνιο ανά cm^2 θεωρούμε κύλινδρο εμβαδού βάσης 1 cm^2 και μήκους c cm (είναι το μήκος που αντιστοιχεί σε χρόνο 1 sec). Τότε θα έχω στον όγκο αυτό πυκνότητα $\frac{V}{c}$ φωτόνια / cm^3.

Έτσι λοιπόν, πολλαπλασιάζοντας τη σχέση (2.2) με $\frac{V}{c}$ και αντικαθιστώντας την (2.8) παίρνω την ενεργό διατομή του φωτοηλεκτρικού φαινομένου:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{mp_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2e^2\hbar}{\omega m^2} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^3 (\vec{\varepsilon}\vec{p_e})^2 \frac{1}{c} \left[\int d^3r e^{i\left(\vec{k} - \frac{\vec{p_e}}{\hbar}\right)\vec{r}} e^{-Zr/a_o}\right]^2 \tag{2.9}$$

όπου dΩ είναι η στερεά γωνία που περιλαβμάνει την ορμή $\vec{p_e}$.

Αν τώρα τα άτομα του στόχου είναι κατανεμημένα με πυκνότητα N άτομα/cm^3, τότε ένα κομμάτι στόχου επιφάνειας A cm^2 και πάχους dx (εμβαδού Adx cm^3) θα περιέχει NAdx άτομα. Και αν τώρα κάθε άτομο έχει ενεργό διατομή για το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο σ , τότε η ενεργός διατομή για όλον τον στόχο θα είναι:

$$NAdx\sigma \tag{2.10}$$

Για n προσπίπτοντα φωτόνια στο στόχο, ο αριθμός των σωματιδίων που αντιδρούν μέσα στο πάχος dx του στόχου, μέσω του φωτοηλεκτρικού φαινομένου, είναι:

$$\frac{interacting\, particles}{incident\, particles} = \frac{\sigma\, photoelectric}{total\, area}$$

ή

$$\frac{dn}{n} = -\frac{NA\sigma dx}{A} = -N\sigma dx \tag{2.11}$$

όπου το αρνητικό πρόσημο δηλώνει την ελάττωση των σωματιδίων από τη δέσμη.

Η ολοκλήρωση της (2.11) δίνει:

$$n(x) = n_o e^{-N\sigma x} \tag{2.12}$$

όπου n_o είναι ο αριθμός των αρχικών σωματιδίων (προσπίπτοντων) , ενώ n(x) είναι ο αριθμός των σωματιδίων που απέμειναν στη δέσμη μετά από πάχος x cm ($n_o - n(x)$ είναι ο αριθμός των σωματιδίων που αλληλεπίδρασαν με φωτοηλεκτρικό φαινόμενο σε πάχος x).

Εάν $[\sigma] = cm^2$ και $[N] = \sigma\omega\mu/cm$, τότε η ποσότητα $\lambda = \frac{1}{N\sigma}$ έχει μονάδες μήκους και ονομάζεται **μέση ελεύθερη διαδρομή**.

Για να υπολογίσουμε τη διαφορική ενεργό διατομή της σχέσης (2.9), χρειαζόμαστε την τιμή του ολοκληρώματος.

Στο παράρτημα υπολογίζεται ότι:

$$\int d^3 r e^{i\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{r}} \frac{e^{-\mu r}}{r} = \frac{4\pi}{\mu^2 + \Delta^2} \tag{2.13}$$

Εάν τώρα παραγωγίσουμε τη σχέση (2.13) ως προς μ, παίρνουμε:

$$\int d^3 r e^{i\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{r}} e^{-\mu r} = \frac{8\pi\mu}{(\mu^2 + \Delta^2)^2} \tag{2.14}$$

Οπότε, θα είναι:

$$\int d^3 \overrightarrow{r} e^{i\left(\overrightarrow{k} - \frac{\overrightarrow{p_e}}{\hbar}\right)\overrightarrow{r}} e^{-\frac{Zr}{a_o}} = \frac{8\pi \frac{Z}{a_o}}{\left[\frac{Z^2}{a_0^2} + \left(\overrightarrow{k} - \frac{\overrightarrow{p_e}}{\hbar}\right)^2\right]^2} = \frac{8\pi Z a_o^3}{[Z^2 + a_0^2\Delta^2]^2} \tag{2.15}$$

όπου τώρα θέσαμε :

$$\overrightarrow{\Delta} = \overrightarrow{k} - \frac{\overrightarrow{p_e}}{\hbar} = \frac{\hbar \overrightarrow{k} - \overrightarrow{p_e}}{\hbar} = \frac{\overrightarrow{p_\gamma} - \overrightarrow{p_e}}{\hbar} \tag{2.16}$$

με $\overrightarrow{p_\gamma} = \hbar \overrightarrow{k}$, η ορμή του φωτονίου.

Με αντικατάσταση της (2.15) στη (2.9) παίρνουμε τη διαφορική ενεργό διατομή του φωτοηλεκτρικού φαινομένου:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{2\pi}{\hbar} \frac{mp_e}{(2\pi\hbar)^3} \frac{2e^2\hbar}{\omega m^2} \left(\frac{Z}{a_o}\right)^3 (\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e})^2 \frac{1}{c} \left[\frac{8\pi Z a_o^3}{[Z^2 + a_0^2\Delta^2]^2}\right]^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = 32 Z^5 a_o^3 \frac{p_e c}{\hbar^3 \omega} \frac{e^2}{mc^2} (\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e})^2 \frac{1}{[Z^2 + a_0^2\Delta^2]^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = 32 Z^5 a_o^3 \left(\frac{p_e c}{\hbar\omega}\right) \left(\frac{\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e}}{mc}\right)^2 \frac{1}{[Z^2 + a_0^2\Delta^2]^4} \frac{me^2}{\hbar^2} \tag{2.17}$$

Εάν τώρα λάβουμε υπ'οψιν ότι η κλασσική ακτίνα του Bohr a_o είναι :

$$a_o = \frac{\hbar}{mc\alpha} \tag{2.18}$$

με $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ να είναι η σταθερά υπέρλεπτης υφής, προκύπτει ότι:

$$a_o = \frac{\hbar^2}{me^2} \tag{2.19}$$

Συνεπώς, από την (2.17) έχουμε:

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = 32 Z^5 a_o^2 \left(\frac{p_e c}{\hbar\omega}\right) \left(\frac{\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e}}{mc}\right)^2 \frac{1}{[Z^2 + a_0^2\Delta^2]^4} \tag{2.20}$$

Οι ενέργειες του φωτονίου $(E_\gamma = \hbar\omega)$ και του ηλεκτρονίου $\left(E_e = \frac{p_e^2}{2m_e}\right)$ συνδεόνται με τη σχέση:

$$\hbar\omega = E_B + \frac{p_e^2}{2m_e} \tag{2.21}$$

Για ενέργειες λοιπόν του εξερχομένου ηλεκτρονίου πολύ μεγαλύτερες της ενέργειας σύνδεσης E_B θα είναι:

$$\hbar\omega \simeq \frac{p_e^2}{2m_e}$$

Δηλαδή, το εκπεμπόμενο ηλεκτρόνιο παίρνει σχεδόν όλην την ενέργεια του φωτονίου.

Οπότε:

1. $\frac{p_e c}{\hbar\omega}\left(\frac{\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e}}{mc}\right)^2 \simeq \frac{2mc}{p_e}\left(\frac{\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e}}{mc}\right)^2 = \frac{2mc}{p_e}\frac{\left(\overrightarrow{\varepsilon}\widehat{p_e}\right)^2 p_e^2}{m^2c^2} = \frac{2p_e}{mc}\left(\overrightarrow{\varepsilon}\widehat{p_e}\right)^2$

   με $\widehat{p_e}$ το μοναδίαιο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του $\overrightarrow{p_e}$.

2. $\Delta^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left(\overrightarrow{p_\gamma} - \overrightarrow{p_e}\right)^2 = \frac{1}{\hbar^2}\left(\overrightarrow{p_\gamma}^2 - 2\overrightarrow{p_\gamma}\overrightarrow{p_e} + \overrightarrow{p_e}^2\right) = \frac{1}{\hbar^2}\left[\left(\frac{\hbar\omega}{c}\right)^2 - 2\frac{\hbar\omega}{c}p_e\widehat{p_\gamma}\widehat{p_e} + p_e^2\right] \Rightarrow$
   $\Rightarrow \Delta^2 \simeq \frac{1}{\hbar^2}\left(p_e^2 - \frac{p_e^3}{m_e c}\widehat{p_\gamma}\widehat{p_e}\right)$

   και για μη σχετικιστικά ηλεκτρόνια, όπως προαναφέρθηκε, θα είναι $p_e = mu_e$ με αποτέλεσμα

   $$\Delta^2 \simeq \frac{p_e^2}{\hbar^2}\left(1 - \frac{u_e}{c}\widehat{p_\gamma}\widehat{p_e}\right)$$

Συνεπώς, με τις προσεγγίσεις αυτές, η σχέση (2.20) δίνει:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = 32Z^5 a_o^2\left(\frac{2p_e}{mc}\right)\left(\overrightarrow{\varepsilon}\widehat{p_e}\right)^2 \frac{1}{\left[Z^2 + a_o^2\frac{p_e^2}{\hbar^2}\left(1 - \frac{u_e}{c}\widehat{p_\gamma}\widehat{p_e}\right)\right]^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = 64Z^5 a_o^2\left(\frac{p_e}{mc}\right)\left(\overrightarrow{\varepsilon}\widehat{p_e}\right)^2 \frac{1}{\left[Z^2 + \frac{p_e^2}{\alpha^2 m^2 c^2}\left(1 - \frac{u_e}{c}\widehat{p_\gamma}\widehat{p_e}\right)\right]^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{64Z^5 a_o^2 \alpha^8\left(\frac{p_e}{mc}\right)\left(\overrightarrow{\varepsilon}\widehat{p_e}\right)^2}{\left[\alpha^2 Z^2 + \frac{p_e^2}{m^2c^2}\left(1 - \frac{u_e}{c}\widehat{p_\gamma}\widehat{p_e}\right)\right]^4} \tag{2.22}$$

όπου πάλι κάναμε χρήση της σχέσης (2.18)

Επιλέγω τώρα τον άξονα-z να δείχνει τη διεύθυνση του φωτονίου, οπότε τα δύο διανύσματα πόλωσης του φωτονίου $\varepsilon^{(1)}$ και $\varepsilon^{(2)}$ θα δείχνουν στις x και y διευθύνσεις αντίστοιχα.

Το μοναδιαίο διάνυσμα $\widehat{p_e}$ γράφεται τότε σε σφαιρικές συντεταγμένες:

$$\widehat{p_e} = \sin\theta\cos\phi\widehat{x} + \sin\theta\sin\phi\widehat{y} + \cos\theta\widehat{z}$$

Συνεπώς:

$$\begin{aligned}\left(\widehat{p_e\varepsilon^{(1)}}\right)^2 &= \sin^2\theta\cos^2\phi \\ \left(\widehat{p_e\varepsilon^{(2)}}\right)^2 &= \sin^2\theta\sin^2\phi\end{aligned}$$

και $\widehat{p_e}\widehat{p_\gamma} = \cos\theta$

Για μη πολωμένη δέσμη φωτονίων θα πρέπει να πάρουμε την μέση τιμή των δύο διευθύνσεων πόλωσης. Οπότε:

$$\overline{\left(\widehat{p_e \varepsilon}\right)^2} = \frac{\left(\widehat{p_e \varepsilon^{(1)}}\right)^2 + \left(\widehat{p_e \varepsilon^{(2)}}\right)^2}{2} = \frac{1}{2}\left[\sin^2\theta\cos^2\phi + \sin^2\theta\sin^2\phi\right] = \frac{1}{2}\sin^2\theta$$

Τότε η σχέση (2.22) δίνει:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{64 Z^5 a_o^2 \alpha^8 \frac{1}{2}\sin^2\theta \frac{\sqrt{2mE}}{mc}}{\left[\alpha^2 Z^2 + \frac{2E}{mc^2}\left(1 - \frac{u_e}{c}\cos\theta\right)\right]^4} \tag{2.23}$$

όπου $E = \frac{p_e^2}{2m}$ είναι η κλασσική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Είναι χρήσιμο να αναφέρουμε ότι για τα ελαφρά στοιχεία, η συνθήκη που θέσαμε:

$$E_\gamma, E \gg E_B$$

εικανοποιείται για ένα ευρύ φάσμα ενεργειών.

Για υδρογονοειδή άτομα, η ενέργεια σύνδεσης είναι :

$$E_B = \frac{1}{2} m c^2 \left(Z\alpha\right)^2$$

οπότε η συνθήκη

$$E \gg E_B$$

δίνει:

$$E \gg \frac{1}{2} m c^2 \left(Z\alpha\right)^2 \Rightarrow \frac{\left(Z\alpha\right)^2 m c^2}{2E} \ll 1$$

Με την προσέγγιση αυτή, η διαφορική ενεργός διατομή γίνεται:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{32\sqrt{2} Z^5 a_o^2 \alpha^8 \left(E/mc^2\right)^{1/2} \sin^2\theta}{\left(\frac{2E}{mc^2}\right)^4 \left[\frac{(\alpha Z)^2 mc^2}{2E} + \left(1 - \frac{u_e}{c}\cos\theta\right)\right]^4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d\sigma}{d\Omega} \simeq 2\sqrt{2} Z^5 a_o^2 \alpha^8 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^{-7/2} \frac{\sin^2\theta}{\left[1 - \frac{u_e}{c}\cos\theta\right]^4} \tag{2.24}$$

Κεφάλαιο 3

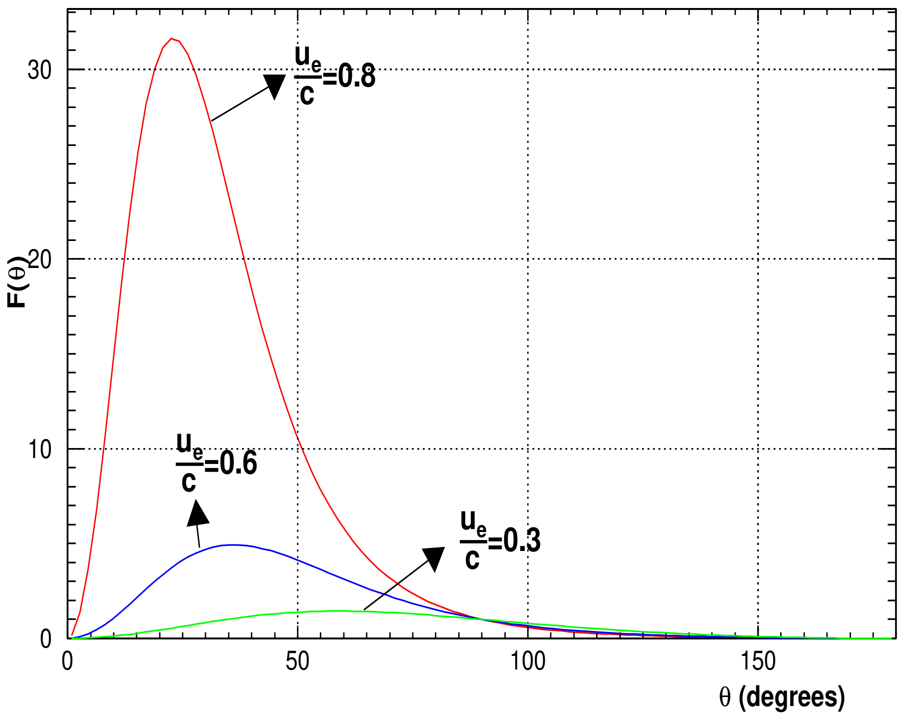
Συμπεράσματα

Ας σχολιάσουμε στο σημείο αυτό τη σχέση (2.24):

1. Αρχικά, η γρήγορη σκέψη που κάνει κανείς για να εκτιμήσει την τάξη μεγέθους της ενεργού διατομής ως $10^{-16}cm^2$ (αφού το άτομο έχει μέγεθος της τάξης του $10^{-8}cm$) δεν είναι σωστή. Και αυτό γιατί, αν και το a_o^2 είναι της τάξης του $10^{-16}cm^2$, πολλαπλασιάζεται με το $\alpha^8 = \left(\frac{1}{137}\right)^8 \simeq 10^{-18}$, το οποίο δεν είναι αγνοήσιμο.
   Αν αγνοήσουμε τη γωνιακή εξάρτηση, ο πρώτος παράγοντας γίνεται:
   $$2\sqrt{2}Z^5 a_o^2 \alpha^8 \left(\frac{E}{mc^2}\right)^{-7/2} = 2\sqrt{2}Z^5 a_o^2 \alpha^8 \left(\frac{mc^2}{E}\right)^{7/2} = 2\sqrt{2}Z^5 a_o^2 \alpha^8 \left(\frac{2mc^2}{mu_e^2}\right)^{7/2} =$$
   $$= 32Z^5 a_o^2 \alpha^8 \left(\frac{c}{u_e}\right)^7 = 32\left(\frac{a_o}{Z}\right)^2 \alpha \left(\frac{\alpha Z c}{u_e}\right)^7$$
   Αρχικά, βλέπουμε την ύπαρξη του παράγοντα α, ο οποίος προέρχεται από την εκπομπή ή την απορρόφηση ενός μόνο φωτονίου. Πράγματι, η σύζευξη του διανυσματικού δυναμικού με ένα φορτισμένο σωμάτιο είναι ανάλογη του φορτίου e, οπότε στο στοιχείο πίνακα θα γίνει e^2, που είναι ανάλογο της σταθεράς της υπέρλεπτης υφής, α.
   Ο παράγοντας $\left(\frac{a_o}{Z}\right)^2$ δίνει μια καλύτερη εκτίμηση της επιφάνειας του ατόμου, απ΄ ότι το a_o^2, αφού τώρα μιλάμε για υδρογονοειδή άτομα.
   Τέλος, ο όρος $\left(\frac{\alpha Z c}{u_e}\right)^7$ είναι το πηλίκο της τροχιακής ταχύτητας του δέσμιου ηλεκτρονίου προς την ταχύτητα του εξερχομένου-ελεύθερου ηλεκτρονίου.

Η γωνιακή κατανομή της διαφορικής ενεργού διατομής $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ είναι :

$$F(\theta) = \frac{\sin^2\theta}{\left[1 - \frac{u_e}{c}\cos\theta\right]^4} \tag{3.1}$$



Σχήμα 3.1: Η γωνιακή κατανομή της σχέσης (3.1) για διάφορες τιμές του πηλίκου $\frac{u_e}{c}$.

Στο σχήμα (3.1) παρουσιάζεται η γωνιακή κατανομή F(ϑ) για διάφορες τιμές του πηλίκου $\frac{u_e}{c}$.
Παρατηρούμε ότι η ενεργός διατομή μηδενίζεται στην εμπρόσθια διεύθυνση (ϑ=0) και αυτό, γιατί τα φωτόνια είναι εγκάρσια πολωμένα. Τότε, αφού το στοιχείο πίνακα είνα ανάλογο του $\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p_e}$ για ορμές $\overrightarrow{p_e}$ παράλληλες στην ορμή του φωτονίου $\left(\overrightarrow{p_e} \parallel \overrightarrow{k} \Rightarrow \overrightarrow{p_e} \perp \overrightarrow{\varepsilon}\right)$, ο παράγοντας αυτός μηδενίζεται.
Ο παρονομαστής έχει σημαντική επίδραση στη διαφορική ενεργό διατομή λόγω του μεγάλου εκθέτη. Όταν το $\frac{u_e}{c} \rightarrow 1$ αυτό γίνεται ιδιαίτερα φανερό, αλλά ακόμα και για τις μέτριες τιμές του $\frac{u_e}{c}$ υπάρχει σημαντική κορυφή στην εμπρόσθια κατεύθυνση, όπου ο παρονομαστής παίρνει την ελάχιστη τιμή του . Αυτό αντιστοιχεί στην ελάχιστη τιμή μεταφερόμενης ενέργειας ανάμεσα στο φωτόνιο και στο ηλεκτρόνιο, $(\overrightarrow{p_\gamma} - \overrightarrow{p_e})^2$.

Τελειώνοντας, θα πρέπει να αναφερθεί ότι σε χαμηλές ενέργειες πρέπει να χρησιμοποιηθεί μια πιο ακριβής έκφραση για την κυματοσυνάρτηση του εξερχομένου ηλεκτρονίου. Αυτή η κυματοσυνάρτηση θα λαμβάνει υπ΄ όψιν της την αλληλεπίδραση Coulomb μεταξύ του πυρήνα και του ηλεκτρονίου και δεν θα το θεωρεί πλέον ελεύθερο.

Είναι φυσικά ευνόητο ότι δε θα υπάρχει φωτοηλεκτρικό φαινόμενο για ενέργειες κάτω από το όριο της ενέργειας ιονισμού του λιγότερου δέσμιου ηλεκτρονίου της εξωτερικής στοιβάδας. Όσο αυξάνει η ενέργεια πάνω από το όριο θα παράγονται φωτοηλεκτρικά όλο και περισσότερα ηλεκτρόνια από ενδότερες στοιβάδες.

Κεφάλαιο 4

Μαζικός Συντελεστής Απορρόφησης.

Εάν κανείς σχεδιάσει το μαζικό συντελεστή απορρόφησης:

$$\mu = \frac{N\sigma}{\rho}$$

όπου N είναι ο αριθμός Avogandro, σ η ενεργός διατομή αλληλεπίδρασης και ρ η πυκνότητα ως συνάρτηση του μήκου κύματος του φωτονίου θα πάρει τη μορφή που φαίνεται στο σχήμα (4.1).

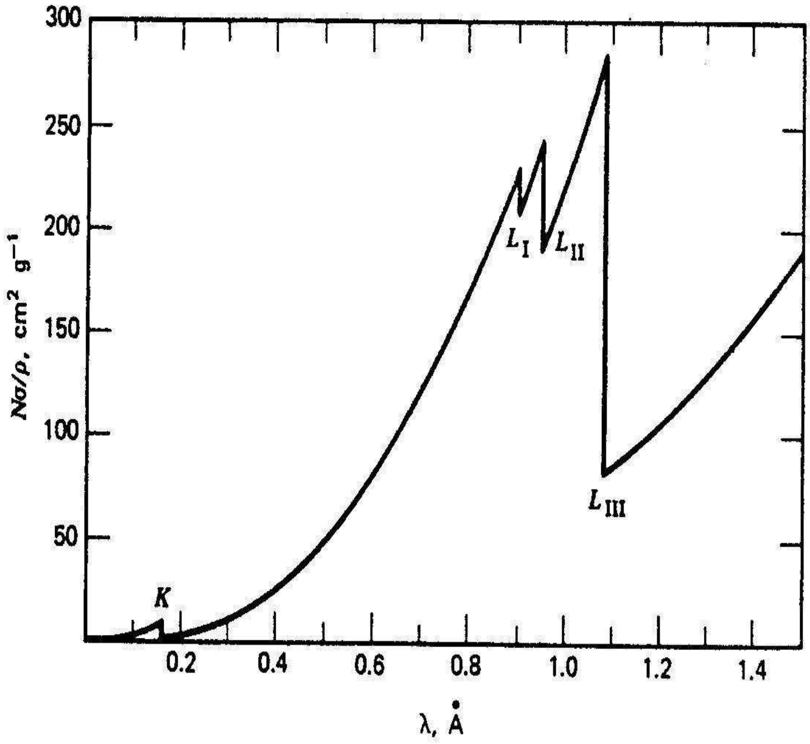
Η κορυφή K οφείλεται στην εκπομπή ηλεκτρονίου από την n=1 στοιβάδα, ενώ οι L-κορυφές οφείλονται στην εκπομπή των ηλεκτρονίων της n=2 στοιβάδας. Οι κορυφές αυτές αντιστοιχούν ακριβώς στην ενέργεια σύνδεσης των διαφόρων ηλεκτρονίων.

Σύμφωνα με τον εμπειρικό νόμο του Moseley, οι στοιβάδες αυτές πρέπει να βρίσκονται σε ενέργειες:

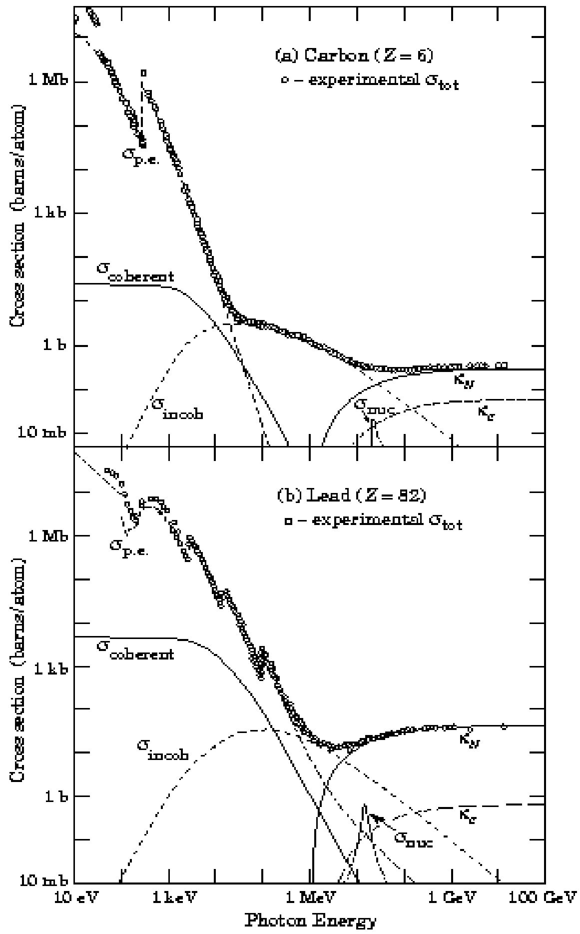
$$E = 13.6\frac{(Z-\sigma_n)^2}{n^2}eV \tag{4.1}$$

όπου σ_n είναι η 'σταθερά θωράκισης' και δίδεται από τη σχέση $\sigma_n = 2n+1$.

Σε σχετικιστικές ενέργειες, οι υπολογισμοί δίνουν την ενεργό διατομή να πέφτει ως $\left(\frac{E}{m}\right)^{-1}$ αντί για $\left(\frac{E}{m}\right)^{-7/2}$. Αλλά σε ενέργειες μεγαλύτερες από 0.5 MeV το φωτοηλεκτρικό φαινόμενο παύει να είναι το κυρίαρχο φαινόμενο απορρόφησης ακτινοβολίας και αρχίζει το φαινόμενο Compton. Όπως ειναι γνωστό για ενέργειες μεγαλύτερες των 1.02 MeV έχουμε την κυριαρχία της παραγωγής ζεύγους e^+, e^- από το φωτόνιο. Το σχήμα 4.2 δείχνει την ολική ενεργό διατομή αλληλεπίδρασης των φωτονίων σε κάθε περιοχή ενέργειας στην περίπτωση που ο στόχος είναι ο άνθρακας και ο μόλυβδος.



Σχήμα 4.1: Ο μαζικός συντελεστής απορρόφησης για την πλατίνη συναρτήσει του μήκους κύματος του φωτονίου .



Σχήμα 4.2: Ολική ενεργός διατομή των φωτονίων ως συνάρτηση της ενέργειας στον άνθρακα (α) και στον μόλυβδο (β) . Φαίνονται οι συνεισφορές των διαφόρων διαδικασιών:

- $\sigma_{p.e}$=Ατομικό φωτοηλεκτρικό (απορρόφηση φωτονίων, εκπομπή ηλεκτρονίων)
- $\sigma_{coherent}$=Σύμφωνη (coherent) σκέδαση (Σκέδαση Reyleigh-τα άτομα δεν ιονίζονται, ούτε διεγείρονται.
- $\sigma_{incoherent}$= ασύμφωνη σκέδαση (Σκέδαση Compton από ένα ηλεκτρόνιο)
- κ_n=Δίδυμη γέννεση λόγω πυρηνικού πεδίου.
- κ_e=Δίδυμη γέννεση λόγω ηλεκτρικού πεδίου.
- σ_{nuc}=Φωτοπυρηνική απορρόφηση (Πυρηνική απορρόφηση που συνήθως συνοδεύεται από εκπομπή νετρονίου ή άλλου σωματιδίου)

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

5.1 Υπολογισμός της χαμιλτονιανής αλληλεπίδρασης H_{int}

Η χαμιλτονιανή που περιγράφει την αλληλεπίδραση ενός ηλεκτρονίου μέσα σε στατικό δυναμικό $V(r)$ με ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, το οποίο χαρακτηρίζεται από το διανυσματικό δυναμικό $\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)$ είναι :

$$H = \frac{\left[\overrightarrow{p} + \frac{e}{c}\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)\right]^2}{2m} + V(r) \tag{5.1}$$

Εάν θεωρήσουμε ότι η αδιατάραχτη, αρχική χαμιλτονιανή είναι :

$$H_o = \frac{\overrightarrow{p}^2}{2m} + V(r) \tag{5.2}$$

τότε ο όρος της χαμιλτονιανής αλληλεπίδρασης θα είναι:

$$H_{int} = \frac{e}{mc}\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)\overrightarrow{p} \tag{5.3}$$

όπου θεωρήσαμε τη βαθμίδα:

$$\nabla.\overrightarrow{A} = 0 \tag{5.4}$$

οπότε $\overrightarrow{A}\overrightarrow{p} = \overrightarrow{p}\overrightarrow{A}$ και αγνοήσαμε όρους 2ης τάξης ως προς το $\overrightarrow{A}$
Εάν γράψουμε το διανυσματικό δυναμικό με τη μορφή:

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t) = A^*(\overrightarrow{r})e^{i\omega t} + A(\overrightarrow{r})e^{-i\omega t} \tag{5.5}$$

τότε στην **εκπομπή** φωτονίου θα συνεισφέρει μόνο ο όρος $e^{i\omega t}$ ($A^*(\overrightarrow{r})$: τελεστής δημιουργίας φωτονίου), ενώ για την **απορρόφηση** φωτονίου θα εμφανιστεί ο όρος $e^{-i\omega t}$ ($A(\overrightarrow{r})$: τελεστής καταστροφής φωτονίου).

Από τις εξισώσεις όμως του Maxwell, προκύπτει ότι :

$$-\nabla^2\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)}{\partial t^2}=\frac{4\pi}{c}\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t) \tag{5.6}$$

Για μηδενική πυκνότητα ρεύματος και για

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=\overrightarrow{A}_o(\overrightarrow{r})e^{-i\omega t} \tag{5.7}$$

προκύπτει:

$$-\nabla^2\overrightarrow{A}_o(\overrightarrow{r})-\frac{\omega^2}{c^2}\overrightarrow{A}_o(\overrightarrow{r})=0 \tag{5.8}$$

η οποία έχει ως λύση την:

$$\overrightarrow{A}_o(\overrightarrow{r})=\overrightarrow{A_0}e^{i\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}} \tag{5.9}$$

με :

$$k^2=\frac{\omega^2}{c^2} \tag{5.10}$$

Από τη βαθμίδα όμως $\nabla.\overrightarrow{A}=0$ προκύπτει ότι:

$$\overrightarrow{k}\overrightarrow{A_o}=0 \tag{5.11}$$

οπότε και:

$$\overrightarrow{A}_o(\overrightarrow{r},t)=\overrightarrow{A_0}e^{i\left(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}-\omega t\right)} \tag{5.12}$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$\overrightarrow{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\overrightarrow{A}}{\partial t}\Rightarrow\overrightarrow{E}=\frac{i\omega}{c}\overrightarrow{A_0}e^{i\left(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}-\omega t\right)} \tag{5.13}$$

ενώ το μαγνητικό πεδίο είναι :

$$\overrightarrow{B}=\overrightarrow{\nabla}x\overrightarrow{A}\Rightarrow\overrightarrow{B}=i\overrightarrow{k}x\overrightarrow{A_o}e^{i\left(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}-\omega t\right)} \tag{5.14}$$

Η πυκνότητα ενέργειας είναι :

$$u=\frac{1}{8\pi}\left(\overrightarrow{E^2}+\overrightarrow{B^2}\right)=\frac{1}{8\pi}\left[2\frac{\omega^2}{c^2}\overrightarrow{A_o}\overrightarrow{A_o^*}+2\left(\overrightarrow{k}x\overrightarrow{A_o}\right)\left(\overrightarrow{k}x\overrightarrow{A_o^*}\right)\right] \tag{5.15}$$

Εάν λάβουμε υπόψιν τη σχέση:

$$\left(\vec{a} x \vec{b}\right)\left(\vec{c} x \vec{d}\right) = (\vec{a}.\vec{c})\left(\vec{b}.\vec{d}\right) - \left(\vec{a}.\vec{d}\right)\left(\vec{b}.\vec{c}\right) \tag{5.16}$$

θα είναι :

$$\left(\vec{k} x \vec{A_o}\right)\left(\vec{k} x \vec{A_o^*}\right) = \left(\vec{k}.\vec{k}\right)\left(\vec{A_o}.\vec{A_o^*}\right) - \left(\vec{k}.\vec{A_o^*}\right)\left(\vec{A_o}.\vec{k}\right) = \vec{k}^2 \vec{A_o}\vec{A_o^*} \tag{5.17}$$

λόγω της σχέσης (5.11)
Άρα:

$$u = \frac{1}{8\pi}\left[2\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A_o}\vec{A_o^*} + 2\vec{k}^2.\vec{A_o}\vec{A_o^*}\right] = \frac{1}{8\pi}\left[2\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A_o}\vec{A_o^*} + 2\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A_o}\vec{A_o^*}\right] =$$

$$= \frac{1}{8\pi}4\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A_o}\overrightarrow{A_o^*} =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{\omega^2}{c^2}\vec{A_o}\vec{A_o^*} \tag{5.18}$$

Εάν έχουμε το σύστημα σε όγκο V, η ολική ενέργεια θα είναι:

$$E = \int u dV = \int \frac{\omega^2}{2\pi c^2}\vec{A_o^*}\vec{A_o} dV = \frac{\omega^2}{2\pi c^2}\left|\vec{A_o}\right|^2 V$$

Εάν μάλιστα στον όγκο αυτό V έχουμε N φωτόνια με $\hbar\omega$ ενέργεια το καθένα, τότε:

$$\frac{\omega^2}{2\pi c^2}\left|\vec{A_o}\right|^2 V = N\hbar\omega \Rightarrow \left|\vec{A_o}\right| = \left(\frac{2\pi c^2 \hbar N}{\omega V}\right)^{1/2}$$

Εάν τώρα θεωρήσουμε $\vec{\varepsilon}$ να είναι το μοναδιαίο διάνυσμα πόλωσης, τότε:

$$\vec{A_o}(\vec{r}, t) = \left(\frac{2\pi c^2 \hbar N}{\omega V}\right)^{1/2}.\vec{\varepsilon} \tag{5.19}$$

Συνεπώς, από τις εξισώσεις:

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \vec{A}_o(\vec{r}) e^{-i\omega t} \\ \vec{A}_o(\vec{r}) &= \vec{A}_o e^{i\vec{k}\vec{r}} \end{aligned}$$

προκύπτει ότι:

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_o e^{i\left(\vec{k}\vec{r} - \omega t\right)}$$

Δηλαδή:

$$\overrightarrow{A}(\overrightarrow{r},t)=\left(\frac{2\pi c^2\hbar N}{\omega V}\right)^{1/2}.\overrightarrow{\varepsilon}e^{i\left(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}-\omega t\right)} \tag{5.20}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η παραπάνω σχέση ισχύει για την **απορρόφηση** ενός φωτονίου από ένα φορτισμένο σωματίδιο, σε μια αρχική κατάσταση, η οποία έχει ήδη N κβάντα ενέργειας με συχνότητα ω.

Από τη σχέση (5.3) θα είναι:

$$H_{int}=\frac{e}{mc}\left(\frac{2\pi c^2\hbar N}{\omega V}\right)^{1/2}.\overrightarrow{\varepsilon}\overrightarrow{p}e^{i\left(\overrightarrow{k}\overrightarrow{r}-\omega t\right)} \tag{5.21}$$

5.2 Υπολογισμός του ολοκληρώματος $\int d^3re^{i\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{r}}\frac{e^{-\mu r}}{r}$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι :

$$d^3r=r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

Εάν τώρα επιλέξω τη διεύθυνση του $\overrightarrow{\Delta}$ ως τον z-άξονα, θα είναι $\overrightarrow{\Delta}.\overrightarrow{r}=\Delta.\widehat{z}\overrightarrow{r}=r\cos\theta$ και θα πάρω:

$$\begin{aligned}
\int d^3re^{i\overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{r}}\frac{e^{-\mu r}}{r} &= \textstyle\int_0^{2\pi}d\phi\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta\int_0^{\infty}r^2e^{i\Delta r\cos\theta}\frac{e^{-\mu r}}{r}dr &=\\
&= 2\pi\textstyle\int_0^{\infty}re^{-\mu r}dr\int_0^{\pi}\sin\theta e^{i\Delta r\cos\theta}d\theta &=\\
&= 2\pi\textstyle\int_o^{\infty}re^{-\mu r}dr\left[-\frac{e^{i\Delta r\cos\theta}}{i\Delta r}\right]_0^{\pi} &=\\
&= \textstyle\frac{2\pi}{i\Delta}\int_0^{\infty}e^{-\mu r}dr(e^{i\Delta r}-e^{-i\Delta r}) &=\\
&= \textstyle\frac{2\pi}{i\Delta}\int_0^{\infty}\left[e^{(i\Delta-\mu)r}-e^{-(i\Delta-\mu)r}\right]dr &=\\
&= \textstyle\frac{2\pi}{i\Delta}\left[-\frac{1}{i\Delta-\mu}-\frac{1}{i\Delta+\mu}\right] &=\\
&= \textstyle\frac{2\pi}{i\Delta}\frac{-i\Delta-\mu-i\Delta+\mu}{-\Delta^2-\mu^2} &=\\
&= \textstyle\frac{4\pi}{\mu^2+\Delta^2}
\end{aligned}$$

Βιβλιογραφία

[1] Stephen Gasiorowicz: Quantum Physics (2nd edition), JoHn Wiley and Sons, Inc.

[2] L. I. Schiff: Quantum Mechanics (3rd edition), McGraw-Hill

[3] R.A.Millikan, Physical Review 7, 355-388 (1916), Issue 3-March 1916

[4] The European Physical Journal C : Review of Particle Physics.